

Classical and quantum cosmology of $f(R)$ gravity's rainbow in Schutz's formalism

Andrés Burton Villalobos

Departamento de Física, Universidad de Tarapacá
CosmoGrav-UTA, Arica, Chile

Estudiante Doctorado en Ciencias Mención Física



Universidad del Bío-Bío (UBB)
Concepción, Chile — Noviembre 7, 2025



[Burton-Villalobos, Otálora, González-Espinoza, Leyva, EPJC 85:716]

Contenidos

- 1 Introduction
- 2 Rainbow geometry
- 3 $f(R)$ gravity's rainbow in Schutz's formalism
- 4 Classical dynamics
- 5 Canonical quantisation
- 6 Concluding remarks

$f(R)$ Gravity's rainbow

Extensión del RG:

RG no renormalizable

Necesidad de incorporar efectos
cuánticos y cosmológicos

Gravedad modificada

- Evita inestabilidades
- Modela inflación (Starobinsky)
- Explica aceleración cósmica tardía

Formalismo
de Schutz

Gravity's
rainbow

Correcciones
dependientes
de energía

Recupera límite
clásico

Cuantización

$$\hat{H} \psi = 0$$



Rainbow geometry

Propuesta de João Magueijo y Lee Smolin: Extender la DSR a espacio tiempo curvos.

La MDR se escribe como:

$$E^2 f_1^2(E) - \mathbb{P}^2 f_2^2(E) = m_0^2. \quad (1)$$

La velocidad de la luz es dependiente de la energía: $c(E) = \frac{f_2(E)}{f_1(E)}$.

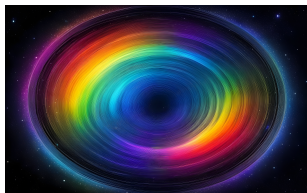


Figure: 1. Rainbow's geometry
[Inteligencia artificial].

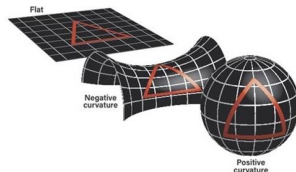


Figure: 2. Geometría del universo
[Avi Loeb. 2021].

En un nivel cuántico a escalas de altas energías, la métrica depende de la energía de la partícula. [J. Magueijo, L. Smolin, CQG, 2004]:

$$ds^2 = -\frac{\mathcal{N}(t)^2}{f_1(E)^2} dt^2 + \frac{a(t)^2}{f_2(E)^2} \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2)$$

$f(R)$ gravity's rainbow in Schutz's formalism

La acción relevante $\rightarrow S = S_g + S_m$. En el minisuperespacio:

$$S_g = \int dt \mathcal{L}_g = \int dt \left\{ \frac{\mathcal{N} a^3}{f_1 f_2^3} f(R) - \zeta \left[R - \frac{6}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{f_1^2 \ddot{a}}{a} + \frac{f_1^2 \dot{a}^2}{a^2} + \frac{K f_2^2 \mathcal{N}^2}{a^2} - \frac{f_1^2 \dot{\mathcal{N}} \dot{a}}{\mathcal{N} a} \right) \right] \right\}. \quad (3)$$

Obteniéndose el lagrangiano:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{6}{\mathcal{N}} \frac{f_1}{f_2^3} a \dot{a}^2 \phi - \frac{6}{\mathcal{N}} \frac{f_1}{f_2^3} a^2 \dot{a} \dot{\phi} + \frac{6K\mathcal{N}}{f_1 f_2} a \phi - \frac{\mathcal{N} a^3}{f_1 f_2^3} V(\phi). \quad (4)$$

Introduciendo relaciones termodinámicas, la ecuación de estado, dentro del formalismo de Schutz [B. F. Schutz, PR, 1970]:

$$p = \frac{w}{(1+w)^{\frac{1}{w}+1}} \left(\frac{f_1}{\mathcal{N}} (\dot{\epsilon} + \theta \dot{S}) \right)^{\frac{1}{w}+1} e^{-\frac{S}{w}}. \quad (5)$$

De esta forma, se obtiene el lagrangiano de materia:

$$\mathcal{L}_m = \frac{\mathcal{N} a^3}{f_1 f_2^3} p = \frac{f_1^{\frac{1}{w}}}{f_2^3} \frac{w \mathcal{N}^{-\frac{1}{w}} a^3}{(1+w)^{1+\frac{1}{w}}} (\dot{\epsilon} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{w}} e^{-\frac{S}{w}}. \quad (6)$$

$f(R)$ gravity's rainbow in Schutz's formalism

El Súper-Hamiltoniano es dado por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}_m = \dot{a}P_a + \dot{\phi}P_\phi + \dot{\epsilon}P_\epsilon + \dot{S}P_S - \mathcal{L}. \quad (7)$$

Con la ayuda de las siguientes relaciones:

$$T = -P_S e^{-S} P_\epsilon^{-(1+w)}, \quad P_T = P_\epsilon^{1+w} e^S. \quad (8)$$

El Súper-Hamiltoniano es expresado:

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H} = \mathcal{N} \left[-\frac{f_2^3}{6f_1} \frac{P_a P_\phi}{a^2} + \frac{f_2^3}{6f_1} \frac{\phi}{a^3} P_\phi^2 - \frac{6Ka\phi}{f_1 f_2} + \frac{a^3 V(\phi)}{f_1 f_2^3} + \frac{f_2^{3w}}{f_1} \frac{P_T}{a^{3w}} \right]. \quad (9)$$

Las ecuaciones hamiltonianas para la dinámica clásica:

$$\dot{a} = -\frac{\mathcal{N}}{6} \frac{f_2^3}{f_1} \frac{P_\phi}{a^2}, \quad \dot{P}_a = \mathcal{N} \left[-\frac{f_2^3}{3f_1} \frac{P_\phi P_a}{a^3} + \frac{f_2^3}{2f_1} \frac{\phi}{a^4} P_\phi^2 + \frac{6K\phi}{f_1 f_2} - \frac{3a^2 V(\phi)}{f_1 f_2^3} + \frac{3wf_2^{3w}}{f_1} a^{-(1+3w)} P_T \right]. \quad (10)$$

$$\dot{\phi} = \mathcal{N} \left[-\frac{f_2^3}{6f_1} \frac{P_a}{a^2} + \frac{f_2^3}{3f_1} \frac{\phi}{a^3} P_\phi \right], \quad \dot{P}_\phi = \mathcal{N} \left[-\frac{f_2^3}{6f_1} \frac{P_\phi^2}{a^3} + \frac{6Ka}{f_1 f_2} - \frac{a^3 V'(\phi)}{f_1 f_2^3} \right]. \quad (11)$$

$$\dot{T} = \frac{f_2^{3w}}{f_1} \frac{\mathcal{N}}{a^{3w}}, \quad \dot{P}_T = 0. \quad (12)$$

En estas, se introduce el gauge $\mathcal{N} = \frac{f_1}{f_2^{3w}} a^{3w} \rightarrow$ Parte temporal.

Classical dynamics

Primera ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{P_0}{6(\phi' + \phi)} \left(\frac{e^N}{f_2} \right)^{3(w-1)} + \frac{V - 6 \left(\frac{f_2}{e^N} \right)^2 K \phi}{6(\phi' + \phi)} \left(\frac{e^N}{f_2} \right)^{6w}. \quad (13)$$

Segunda ecuación de Friedmann:

$$H' = (3w - 2)H + \frac{\left(\frac{e^N}{f_2} \right)^{6w} \left[V_{,\phi} - 6K \left(\frac{f_2}{e^N} \right)^2 \right]}{6H}. \quad (14)$$

Ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \phi'' - 4\phi + \mathcal{B} \left\{ 3 \left[P_0 w + \left(\phi V_{,\phi} - V - 4K \phi \left(\frac{f_2}{e^N} \right)^2 \right) \left(\frac{e^N}{f_2} \right)^{3(w+1)} \right] \phi' + 3P_0(w+1)\phi \right. \\ \left. + \left(V_{,\phi} - 6 \left(\frac{f_2}{e^N} \right)^2 K \right) \phi'^2 \left(\frac{e^N}{f_2} \right)^{3(w+1)} + 2 \left(V_{,\phi} - 12K \left(\frac{f_2}{e^N} \right)^2 \right) \phi^2 \left(\frac{e^N}{f_2} \right)^{3(w+1)} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Considerar la función $f(R) = \eta R + \lambda R^\nu$, $\rightarrow \phi = f_{,R} = \eta + \lambda \nu R^{\nu-1}$ Entonces:

$$R = \left(\frac{\phi - \eta}{\lambda \nu} \right)^{1/(\nu-1)}. \quad (16)$$

El potencial escalar resulta [A. A. Starobinsky, PL, 1980] [A. De Felice, S. Tsujikawa, LLR, 2010]:

$$V(\phi) = \lambda(\nu - 1) \left(\frac{\phi - \eta}{\lambda \nu} \right)^{\nu/(\nu-1)}. \quad (17)$$

Classical dynamics

Introduciendo $\mathcal{U}(\phi) = \phi'$ y para inflación de Starobinsky ($\nu = 2$), la ecuación de movimiento:

$$\mathcal{U}_{,\phi} = 3 - \frac{6\phi}{\phi - \eta} - \frac{4\phi^2}{(\phi - \eta)\mathcal{U}} - \frac{2\mathcal{U}}{\phi - \eta} + \frac{4\phi}{\mathcal{U}}. \quad (18)$$

Se realiza la transformación $\phi = \eta + \varphi$.

En el primer caso ($\varphi \gg \eta$):

$$\mathcal{U}(\varphi) = \varphi' = \frac{C_1}{\varphi^2} - \varphi \rightarrow \phi \sim \varphi(N) = \left[C_1 + e^{-3(C_2+N)} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (19)$$

Se obtiene:

$$\epsilon_H(N) \equiv -\frac{H'}{H} = -3w + \frac{2}{1 + C_1 e^{3(C_2+N)}}. \quad (20)$$

En el segundo caso ($\varphi \ll \eta$):

$$\mathcal{U} = \frac{\tilde{C}_1}{3\varphi^2} \rightarrow \varphi(N) = \left(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_1 N \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (21)$$

Se obtiene:

$$\epsilon_H(N) = -\frac{2\tilde{C}_1}{3(\tilde{C}_1 N + \tilde{C}_2)} - 3w. \quad (22)$$

- Los resultados indican una fase de **Superinflación**

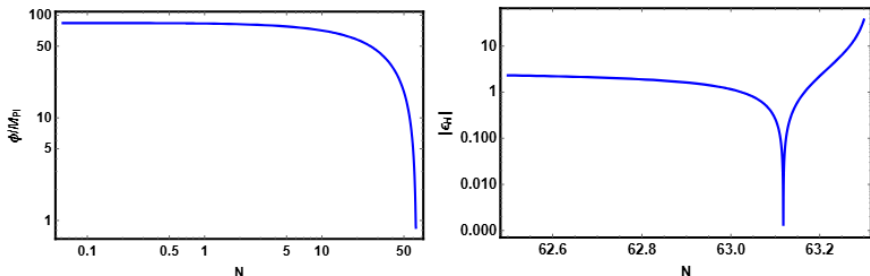


Figure: 4. El panel izquierdo muestra la evolución del campo escalar $\phi(N)$, mientras que el panel derecho representa $|\epsilon_H| = |H'/H|$, ambos para $w = 1$ y $\eta = 1$, y con las condiciones iniciales $\phi(0)/M_{\text{Pl}} = 84$ y $U(0) \equiv \phi'(0)/M_{\text{Pl}} = 0,05$.

Canonical quantisation

Ecuación Wheeler-DeWitt a partir del Súper-Hamiltoniano, con la restricción $\mathcal{H} = 0$:

$$\mathcal{H}\Psi(a, \phi, T) = \left[-\frac{f_2^3}{6f_1} \frac{P_a P_\phi}{a^2} + \frac{f_2^3}{6f_1} \frac{\phi}{a^3} P_\phi^2 - \frac{6Ka\phi}{f_1 f_2} + \frac{a^3 V(\phi)}{f_1 f_2^3} + \frac{f_2^{3w}}{f_1} \frac{P_T}{a^{3w}} \right] \Psi(a, \phi, T) = 0. \quad (23)$$

Se realiza la cuantización y se obtiene:

$$\left[\frac{a^{-2}}{6} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \phi} - \frac{a^{-3}}{3} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{a^{-3}}{6} \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{Aa^{-3}}{6} \phi^{-1} - \frac{6Ka\phi}{f_2^4} + \frac{a^3 V(\phi)}{f_2^6} - if_2^{3(w-1)} a^{-3w} \frac{\partial}{\partial T} \right] \Psi(a, \phi, T) = 0 \quad (24)$$

El formalismo de Schutz, permite introducir la variable T permitiendo reescribir la ecuación en forma tipo Schrödinger $i \frac{\partial}{\partial T} \Psi(a, \phi, T) = \hat{\mathcal{H}} \Psi(a, \phi, T)$.

- **Permite encontrar un paquete de ondas que evoluciona en el tiempo.**

El operador Hamiltoniano es Hermitico, con el producto interno:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{(a, \phi)} a^{-3w} \Phi^* \Psi da d\phi. \quad (25)$$

Canonical quantisation

Separando las variables en la ecuación SWD $\rightarrow \Psi(a, \phi, T) = e^{-iET} \Psi(a, \phi)$:

$$\left\{ \frac{x^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x}{4} \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial}{\partial y} + \left[A - \frac{36Kx^4}{f_2^4} + \frac{6x^6 y^{-2} V(y)}{f_2^6} - \frac{6Ex^{3(1-w)} y^{\frac{1}{2}(3w-1)}}{f_2^{3(1-w)}} \right] \right\} \Psi(x, y) = 0 \quad (26)$$

Se estudia la ecuación de Wheeler-DeWitt con $\nu = 2$, $\eta = 0$, $w = 1$, $K = 0$.

Tomando $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$, se obtiene:

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} + \left(1 - \nu^2 - \frac{144Kx^4}{f_2^4} + \frac{6x^6}{\lambda f_2^6} \right) \right] X(x) = 0, \quad \left[y^2 \frac{d^2}{dy^2} + 2y \frac{d}{dy} + 6Ey - \frac{\nu^2 - 1}{4} \right] Y(y) = 0. \quad (27)$$

Donde se ha definido: $x(a, \phi) = a\phi^{1/2}$, $y(a, \phi) = \phi$.

Considerando las funciones de Bessel:

$$\Psi_{\nu E}(x, y, T) = e^{-iET} \frac{x}{\sqrt{y}} J_{\frac{\nu}{3}} \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3\lambda}} x^3}{f_2(E)^3} \right) J_{\nu} \left(2\sqrt{6yE} \right). \quad (28)$$

La solución general resulta:

$$\Psi(x, y, T) = \int_{E=0}^{\infty} \int_{\nu=0}^{\infty} A(E) C(\nu) \Psi_{\nu E}(x, y, T) dE d\nu. \quad (29)$$

Eligiendo: $f_2(E) = 1 + kE$, $A(E) = 12(24E)^{\nu/2} e^{-24\sigma E}$, $C(\nu) = e^{-a(\nu-b)^2}$

Canonical quantisation

Y usando la relación [G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed. CUP, 1995.]:

$$\int_0^\infty J_\nu(at) e^{-p^2 t^2} t^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu)(\frac{1}{2}a/p)^\nu}{2p^\mu \Gamma(\nu+1)} e^{-\frac{a^2}{4p^2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + 1; \nu + 1; \frac{a^2}{4p^2}\right). \quad (30)$$

se obtienen las funciones de onda del universo:

$$\psi_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{3\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{X^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y}{4\sigma + i\frac{T}{6}}} \sum_{n=1}^2 \int_0^\infty \frac{C(\nu) y^{\frac{3\nu}{2}} \mathcal{H}_\nu^{(n)}(X)}{(2\sigma + i\frac{T}{12})^{3\nu+1}} d\nu. \quad (31)$$

$$\psi_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{3\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{X^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y}{4\sigma + i\frac{T}{6}}} \sum_{m=0}^1 \sum_{n=1}^2 \int_0^\infty \left\{ \frac{\kappa C(\nu) y^{\frac{3\nu}{2}}}{(2\sigma + i\frac{T}{12})^{3(\nu+1)}} (-1)^m \mathcal{H}_{\nu-1+2m}^{(n)}(X) \times \left[y - \left(4\sigma + i\frac{T}{6}\right) (3\nu+1) \right] \right\} d\nu. \quad (32)$$

Usando aproximaciones: **Para** $X \rightarrow \infty$:

$$\Psi(X, y, T) \simeq \frac{y^{\frac{(3s-1)}{2}} e^{-\frac{y}{4\sigma + i\frac{T}{6}}}}{(2\sigma + i\frac{T}{12})^{3s+1}} \left[C_1 \frac{\cos\left[X - \frac{\pi}{2}\left(s + \frac{1}{2}\right)\right]}{X^{\frac{1}{6}}} + C_2 \frac{X^{\frac{5}{6}} \left[(4\sigma + i\frac{T}{6})(3s+1) - y\right] \sin\left[X - \frac{\pi}{2}\left(s + \frac{1}{2}\right)\right]}{(2\sigma + i\frac{T}{12})^2} \right]. \quad (33)$$

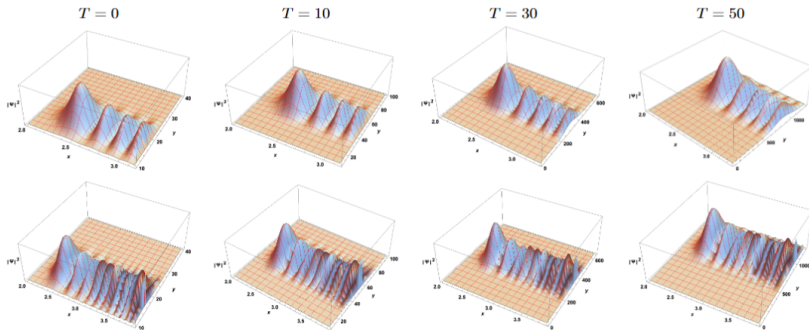
Para $X \rightarrow 0$:

$$\Psi(X, y, T) \approx 0. \quad (34)$$

Canoncial quantisation

Fila 1 paquete de ondas sin efecto Arcoíris.

Fila 2 paquete de ondas con efecto Arcoíris.



Adoptando la interpretación de los muchos mundos:

$$\langle a \rangle(T) = \frac{\int a^{-3w} \Psi(X, y, T)^* a \Psi(X, y, T) da d\phi}{\int a^{-3w} \Psi(X, y, T)^* \Psi(X, y, T) da d\phi} = \alpha \frac{\int X^{-\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{2}} |\Psi|^2 dX dy}{\int X^{-\frac{5}{3}} y |\Psi|^2 dX dy}, \text{ con } \alpha = \left(\frac{3\lambda}{2}\right)^{1/6}, y$$

$$\langle \phi \rangle(T) = \frac{\int a^{-3w} \Psi(X, y, T)^* \phi \Psi(X, y, T) da d\phi}{\int a^{-3w} \Psi(X, y, T)^* \Psi(X, y, T) da d\phi} = \frac{\int X^{-\frac{5}{3}} y^2 |\Psi|^2 dX dy}{\int X^{-\frac{5}{3}} y |\Psi|^2 dX dy}.$$

Canonical quantisation

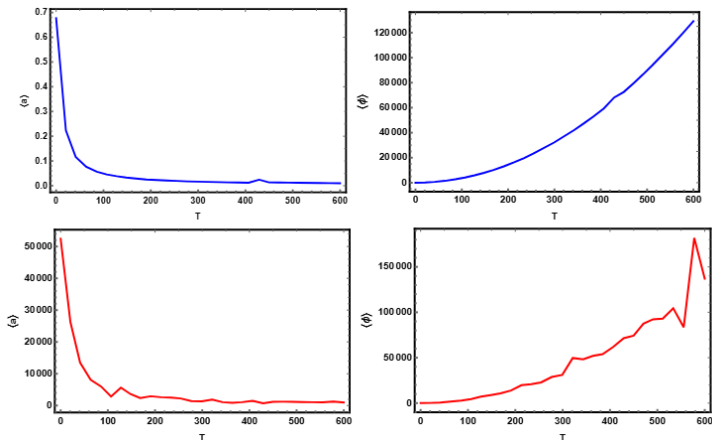
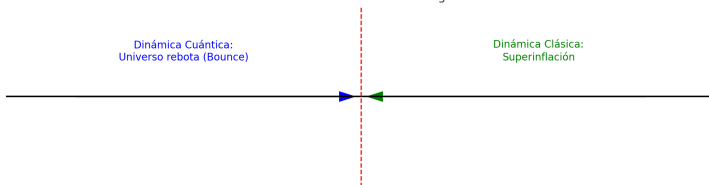


Figure: Evolución de los valores esperados del factor de escala y del campo escalar efectivo para los parámetros $\lambda = 1$, $s = 10$, $\sigma = 0,3$ y $b = 10^3$. La fila superior (líneas azules) representa la evolución de $\langle a \rangle(T)$ y $\langle \phi \rangle(T)$ en ausencia de efectos de arcoíris ($\kappa = 0$), mientras que la fila inferior (líneas rojas) muestra su evolución en presencia de efectos de arcoíris con $\kappa = 5 \times 10^{-4}$.

Concluding remarks

- Se obtuvieron ecuaciones de campo y soluciones analíticas, validadas numéricamente en el modelo de Starobinsky.
- A nivel cuántico, se resolvió la ecuación de Schrödinger–Wheeler–DeWitt (SWD) y la función de onda del Universo.
- Se identificó una fase superinflacionaria influenciada por el arcoíris de gravedad en las ecuaciones de Friedmann.
- Los efectos cuánticos eliminan la singularidad clásica, dando lugar a un rebote.
- La función arcoíris modifica la función de onda y la probabilidad de configuraciones cosmológicas.
- La interpretación de los muchos mundos favorece factores de escala pequeños y fuertes correcciones de gravedad modificada.
- Las correcciones cuánticas y el arcoíris de gravedad afectan el rebote y la evolución inflacionaria.
- Se sugiere que estos efectos podrían dejar señales en el CMB y la estructura a gran escala.

Evolución del Universo en torno a la singularidad $t = 0$



¡Muchas gracias!



DEPARTAMENTO DE FÍSICA



UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado



2ND INTERNATIONAL JOINT MEETING ON COSMOLOGY AND GRAVITATION.

Pontificia Universidad Católica del Perú - Lima, Perú