UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN

SEXTO ENCUENTRO COSMOCONCE

Generalización de las álgebras bms_3, y 2D-conformal, expandiendo el álgebra de Virasoro.

arXiv:1707.07209 [hep-th]

R. Caroca [1], **Patrick Concha, Evelyn Rodríguez, y Patricio Salgado-Rebolledo.**

[1] Alonso de Ribera 285, Concepción.

rcaroca@ucsc.cl

Tabla de contenidos

Motivación. Simetrías infinito-dimensional

- El álgebra de Virasoro corresponde a una extensión central del álgebra de los difeomorfismos infinitesimales en el círculo (Witt).
- Las simetrías de Virasoro (infinito-dimensional), tienen importantes aplicaciones en teoría de campo en 2-dimensiones (CFT), teorías de cuerdas, gravitación, entre otras.
- El álgebra Conformal en dos dimensiones (2D Conformal) es infinito dimensional y su extensión central es dada por dos copias del álgebra de Virasoro.
- La simetría de Virasoro aparece en muchos sistemas físicos con invariancia conforme definida en un espacio 2-dimensional.

Ejemplo de aplicaciones:

- La simetría asintótica de la Gravedad en 3-dimensiones. Brown y Henneaux, mostraron que para una condición de contorno conveniente, la simetría asintótica de la gravedad de Einstein en 3-dimensiones, con constante cosmológica negativa, es dada por dos copias del álgebra de Virasoro.
- La presencia de la "centrally extended 2D-conformal" simetría en el infinito fue la primera pista de la dualidad holográfica, conjeturada después por Maldacena en el contexto de las cuerdas (AdS/CFT).
- Modelo sigma 2-dimensional.
- La estructura asintótica de la matriz S en la Relatividad General .
- La teoría de cuerdas.
- La teoría de solitones.
- Mecánica de fluidos.

El método de *S-expansión*

Sea $S=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=0}^{N}$ un semigrupo abeliano finito equipado con una ley de composición asociativa y conmutativa $S\times S\rightarrow S$

$$(\lambda_\alpha,\lambda_\beta)\rightarrow\lambda_\alpha\lambda_\beta=K_{\alpha\beta}^{\gamma}\lambda_\gamma \quad , \quad donde \quad K_{\alpha\beta}^{\gamma}=K_{\beta\alpha}^{\gamma}$$

Sea el par ($\mathcal{G}$; [;]), *un álgebra de Lie donde* $\mathcal{G}$ *es un espacio vectorial de dimensión finita* con base,

$$\mathrm{G}=\{T_A\}_{A=1}^{\dim G}$$

sobre el campo K, y [;], *es una regla de composición* $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\rightarrow\mathcal{G}$,

$$(\mathrm{T_A},\mathrm{T_B})\rightarrow[\mathrm{T_A},\mathrm{T_B}]=\mathrm{C_{AB}^{C}T_C}$$

El método de *S-expansión*

El método de S-expansión es definido como el producto directo $\mathcal{B}=\mathcal{S}\times\mathcal{G}$

$$\mathrm{B}=S\times G=\left\{ \quad T_{(A,\alpha)}=\lambda_\alpha T_A:\lambda_\alpha\in S \qquad y \qquad ,T_A\in G \qquad \right\}$$

equipado con una ley de composición [;]: $\mathcal{B}\times\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}$ *definida por*

$$\left[T_{(A,\alpha)},T_{(B,\beta)}\right]=\lambda_\alpha\lambda_\beta\left[T_A,T_B\right]=K_{\alpha\beta}^{\gamma}C_{AB}^{C}\lambda_\gamma T_C$$

$$\left[\mathrm{T}_{(\mathrm{A},\alpha)},\mathrm{T}_{(\mathrm{B},\beta)}\right]=\mathrm{C}_{(\mathrm{A},\alpha)(\mathrm{B},\beta)}{}^{(\mathrm{C},\gamma)}\mathrm{T}_{(\mathrm{C},\gamma)} \quad ,$$

donde $C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)}=K_{\alpha\beta}^{\gamma}C_{AB}^{C}$ son las constantes de estructuras que satisfacen la condición de Jacobi. Es decir, se cumple que:

$$JI(S\times(G,[,])_S)=K^{\gamma}{}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(JI(G,[,]))\Rightarrow\frac{1}{2}\varepsilon^{B_1B_2B_3}_{A_1A_2A_3}C_{(B_1,\alpha_1)(B_2,\alpha_2)}{}^{(C,\gamma)}C_{(C,\gamma)(B_3,\alpha_3)}{}^{(D,\beta)}=0,$$

La ecuación anterior define el corchete de Lie del álgebra de Lie S-expandida, donde $\{T_{(A,\alpha)}\}$ es un base de SxG.

La 0-reducción en el método de S-expansión es una manera de generalizar la contracción de I.W. que ha dado lugar a nuevas simetrías usadas para formular teorías de la gravedad.

$$\begin{tikzcd}
AdS(C_3) \arrow[d, "I.W."'] & \begin{array}{c} AdS \oplus Lorentz(C_4) \\ \text{Finito-dimensional} \end{array} \arrow[d, "I.W."'] & \begin{array}{c} vir^2 = vir \oplus vir \\ \text{Infinito-dimensional} \end{array} \arrow[d, "I.W."'] \\
Poincaré(B_3) & Maxwell(B_4) & \begin{array}{c} bms_3 \\ \text{Infinito-dimensional} \end{array}
\end{tikzcd}$$

m	Generadores	Tipo B_m	Tipo C_m
3	J_{ab}, P_a	Poincaré	AdS
4	J_{ab}, P_a, Z_{ab}	Maxwell	$AdS \oplus Lorentz$
5	J_{ab}, P_a, Z_{ab}, R_a	$\mathcal{B}_5$	$\mathcal{C}_5$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	$J_{ab}, P_a, Z_{ab}^{(i)}, R^{(i)}$	$\mathcal{B}_m$	$\mathcal{C}_m$

Expandiendo el álgebra de Virasoro bir

Partimos del algebra de Virasoro $vir = Span\{l_m\}$

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (1)$$

$$[c, l_m] = 0, \quad m \in Z \qquad (2)$$

$$SL(2,R) \subseteq vir$$

y un semigrupo abeliano, cuyo producto interior es definido por

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\beta \lambda_\alpha = K_{\alpha\beta}^{\gamma}\lambda_\gamma \, , \quad , \quad donde \quad K_{\alpha\beta}^{\gamma} = K_{\beta\alpha}^{\gamma}. \qquad (3)$$

Definimos Virasoro expandido:

$$vir_h := S \times vir = \left\{ \quad l_{(m,\alpha)} = \lambda_\alpha l_m \quad donde \quad \lambda_\alpha \in S, \quad l_m \in vir \quad \right\} \qquad (4)$$

que satisface la relación de conmutación

$$\left[l_{(m,\alpha)}, l_{(n,\beta)}\right] = (m-n) K^{\gamma}{}_{\alpha\beta} l_{(m+n,\gamma)} + \frac{c_{\alpha\beta}}{12} m\left(m^2 - 1\right)\delta_{m+n,0} \qquad (5)$$

donde $c_{\alpha\beta}$ denota un conjunto de cargas centrales dadas por

$$c_{\alpha\beta} = c K_{\alpha\beta}^{\gamma} \lambda_\lambda \qquad (6)$$

Existe un subálgebra $h = S \times SL(2,R)$ es expandida por el conjunto

$$h = Span \left\{ \quad l_{(-1,\alpha)}, l_{(0,\alpha)}, l_{(1,\alpha)} \quad \right\} \subseteq vir_h \qquad (8)$$

Centrally extended 2D-conformal algebra vir^2.

Es una suma directa de 2 álgebras de Virasoro $vir^2 = vir \oplus vir.$

Es obtenida usando el (semi)grupo

$$Z_2 = \{\lambda_0, \lambda_1\} \tag{9}$$

con la regla de multiplicación

$$\begin{array}{ccc} * & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{array} \Rightarrow \qquad K_{00}^{0} = K_{11}^{0} = K_{01}^{1} = K_{10}^{1} = 1 \tag{10}$$

Denotamos los generadores y cargas centrales expandidas

$$J_m \equiv l_{(m,0)} = \lambda_0 l_m \quad , \quad c_1 \equiv \lambda_0 c \tag{11}$$

$$P_m \equiv l_{(m,1)} = \lambda_1 l_m \quad , \quad c_2 \equiv \lambda_1 c$$

$$\text{i)}\quad [J_m, J_n] = [\lambda_0 l_m, \lambda_0 l_n] = \lambda_0 \lambda_0 [l_m, l_n] = \lambda_0 [l_m, l_n]$$

$$[J_m, J_n] = (m-n)\lambda_0 l_{m+n} + \frac{c\lambda_0}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$[J_m, J_n] = (m-n)J_{m+n} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$\text{ii)}\quad [J_m, P_n] = [\lambda_0 l_m, \lambda_1 l_n] = \lambda_0 \lambda_1 [l_m, l_n] = \lambda_1 [l_m, l_n]$$

$$[J_m, P_n] = (m-n)\lambda_1 l_{m+n} + \frac{c\lambda_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$[J_m, P_n] = (m-n)P_{m+n} + \frac{c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$\text{iii)}\quad [P_m, P_n] = [\lambda_1 l_m, \lambda_1 l_n] = \lambda_1 \lambda_1 [l_m, l_n] = \lambda_0 [l_m, l_n]$$

$$[P_m, P_n] = (m-n)J_{m+n} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

Centrally extended 2D-conformal algebra: $vir^2 = vir \oplus vir$

Por tanto, nos queda:

$$\left[J_m, J_n\right] = (m-n)J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}$$

$$\left[J_m, P_n\right] = (m-n)P_{(m+n)} + \frac{c_2}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \qquad (11)$$

$$\left[P_m, P_n\right] = (m-n)J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \qquad .$$

Al hacer el cambio de base

$$L_m = \frac{1}{2}\left(P_m + J_m\right) \quad , \quad \bar{L}_m = \frac{1}{2}\left(P_m - J_m\right), \qquad (12)$$

Obtenemos vir^2.

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{(m+n)} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{(m+n)} + \frac{\bar{c}}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (13)$$

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0$$

con las cargas centrales $c = \frac{1}{2}(c_2 + c_1) \quad y \quad \bar{c} = \frac{1}{2}(c_2 - c_1). \qquad (14)$

$$\therefore Z_2 \times vir = vir \oplus vir \equiv vir^2$$

vir^2 es una “infinite-dimensional lift” del álgebra AdS en (2+1)D.

$$En \quad bir^2(11): n,m=-1,0,1 \quad \rightarrow \quad \{J_0, J_1, J_{-1}, P_0, P_1, P_{-1}\}$$

$$bir^2(n,m=-1,0,1) \Rightarrow \begin{cases} [J_0, J_1] = -J_1, & [J_0, J_{-1}] = J_{-1}, & [J_1, J_{-1}] = 2J_0 \\ [J_0, P_1] = -P_1, & [J_0, P_{-1}] = P_{-1}, & [J_1, P_{-1}] = 2P_0 \\ [P_0, P_1] = -J_1, & [P_0, P_{-1}] = J_{-1}, & [P_1, P_{-1}] = 2J_0 \end{cases}$$

Los generadores de AdS $\{j_a, p_a\}$ se obtienen haciendo el cambio de base, con a = 0,1,2

$$\{J_0, J_1, J_{-1}, P_0, P_1, P_{-1}\} \xrightarrow[\text{de} \quad \text{base}]{\text{cambio}} \{j_0, j_1, j_2, p_0, p_1, p_2\}$$

$$a,b=0,1,2 \rightarrow \quad \begin{matrix} J_{-1} = -2j_0, & J_0 = j_2, & J_1 = j_1 \\ P_{-1} = -2p_0, & P_0 = p_2, & P_1 = p_1 & \qquad (cb) \end{matrix}$$

Se obtiene el álgebra AdS:

con una métrica de Minkowski “off diagonal”

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P.j. :Tomamos el conmutador y hacemos el cambio de base

$$[J_0, J_1] = -J_1 \quad \Rightarrow \quad [j_2, j_1] = -j_1 \Rightarrow \quad [j_1, j_2] = j_1 \qquad (i)$$

$$AdS \qquad : \quad [j_a, j_b] = \varepsilon_{abc} j^c \quad , \quad [j_a, p_b] = \varepsilon_{abc} p^c \quad , [p_a, p_b] = \varepsilon_{abc} j^c$$

$$[j_1, j_2] = \varepsilon_{120} j^0 = j^0 = \eta^{0a} j_a = \eta^{00} j_0 + \eta^{01} j_1 + \eta^{02} j_2$$

$$[j_1, j_2] = \eta^{01} j_1 = j_1 \qquad (ii) \Rightarrow (i) \quad y \quad etc.$$

$$\therefore \qquad AdS \subseteq vir^2 \equiv vir \oplus vir$$

El álgebra bms_3.

Consideramos ahora otro semigrupo

$$S_E^{(1)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\} \tag{15}$$

con la ley de multiplicación

$$\begin{array}{cccc} * & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{array} \tag{16}$$

con un cero

$$\lambda_2 \equiv 0_S \quad y \quad \lambda_2 l_m \equiv 0_S$$

Con los generadores y cargas

$$J_m \equiv l_{(m,0)} = \lambda_0 l_m \quad , \quad c_1 \equiv c_{00} = c_{11} = \lambda_0 c \qquad (17)$$

$$P_m \equiv l_{(m,1)} = \lambda_1 l_m \quad , \quad c_2 \equiv c_{01} = \lambda_1 c.$$

Al desarrollar los conmutadores obtenemos el álgebra bms3.

$$\begin{aligned}
[J_m, J_n] &= (m-n)J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
[J_m, P_n] &= (m-n)P_{(m+n)} + \frac{c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (18) \\
[P_m, P_n] &= 0.
\end{aligned}$$

También se obtiene, a partir de las dos copias de Virasoro vir^2 haciendo una contracción de IW a (11), rescalando sus generadores como

$$J_m \to J_m \quad , \quad P_m \to \sigma \cdot P_m , \quad c_1 \to c_1 , \quad c_2 \to \sigma \cdot c_2 \qquad (19)$$

y extender el límite singular $\sigma \to \infty$. En efecto:

$$[J_m, J_n] = (m-n) J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$\cancel{\sigma}[J_m, P_n] = (m-n)\cancel{\sigma}P_{(m+n)} + \frac{\cancel{\sigma}c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (11)$$

$$\cancel{\sigma}^2[P_m, P_n] = (m-n)\underbrace{\cancel{J}_{(m+n)}}_{0} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \quad .$$

Cuando $\sigma \to \infty$ se obtiene bms_3

$$[J_m, J_n] = (m-n) J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$[J_m, P_n] = (m-n) P_{(m+n)} + \frac{c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (11)$$

$$[P_m, P_n] = 0 \quad .$$

$$\therefore S_E^{(1)} \times vir \to bms_3$$

Con n, m =-1,0,1 y haciendo un cambio de base:

$$a,b=0,1,2 \rightarrow \begin{array}{lll} J_{-1}=-2j_0, & J_0=j_2, & J_1=j_1 \\ P_{-1}=-2p_0, & P_0=p_2, & P_1=p_1 \end{array} \qquad (cb)$$

$$Poincaré: \quad [j_a, j_b]=\varepsilon_{abc}j^c \quad , \quad [j_a, p_b]=\varepsilon_{abc}p^c \quad ,[p_a, p_b]=0$$

$$\therefore ISO(2,1)\subseteq bms_3$$

Observación: bms_3 álgebra es una “infinite-dimensional lift” del álgebra de Poincaré en (2+1)D.

Deformed bms_3 algebra.

Si tomamos el semigrupo

$$S_E^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \qquad (20)$$

Con la regla de multiplicación, y un cero

$*$	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_3
λ_2	λ_2	λ_3	λ_3	λ_3
λ_3	λ_2	λ_3	λ_3	λ_3

$$y \quad \lambda_3 \equiv 0_S \quad , \quad \lambda_3 l_m \equiv 0_S \qquad (21)$$

Los generadores y las cargas centrales expandidas, no nulos, son:

$$
\begin{aligned}
J_m &\equiv l_{(m,0)} = \lambda_0 l_m \quad , \quad c_1 \equiv c_{00} = c_{11} = \lambda_0 c \\
P_m &\equiv l_{(m,1)} = \lambda_1 l_m \quad , \quad c_2 \equiv c_{01} = \lambda_1 c , \\
Z_m &\equiv l_{(m,2)} = \lambda_2 l_m \quad , \quad c_3 \equiv c_{02} = c_{11} = \lambda_2 c .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

El álgebra $S_E^{(2)}$-expandida y 0_S -reducida, satisface las relaciones de conmutación:

Deformed bms3.

$$[J_m, J_n] = (m-n)J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$[J_m, P_n] = (m-n)P_{(m+n)} + \frac{c_2}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$[P_m, P_n] = (m-n)Z_{(m+n)} + \frac{c_3}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (23)$$
$$[J_m, Z_n] = (m-n)Z_{(m+n)} + \frac{c_3}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$[P_m, Z_n] = 0 \quad , \quad [Z_m, Z_n] = 0 \quad ,$$

Se puede obtener el álgebra de Maxwell en (2+1)-dimensiones, fijando los índices n, m= -1,0,1.

$$(n,m=-1,0,1) \xrightarrow[]{\substack{Deformed \\ bms_3}} \{J_0, J_1, J_{-1}, P_0, P_1, P_{-1}, Z_0, Z_1, Z_{-1}\}$$

y en términos de los generadores $\{j_a, p_a, z_a\}$ obtenidos haciendo el cambio de base

$$J_{-1} = -2j_0, \quad J_0 = j_2, \quad J_1 = j_1$$
$$P_{-1} = -2p_0, \quad P_0 = p_2, \quad P_1 = p_1$$
$$Z_{-1} = -2z_0, \quad Z_0 = z_2, \quad Z_1 = z_1$$

y usando una métrica de Minkowski “off diagonal”

$$\begin{pmatrix} Maxwell \\ a\lg ebra \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} [j_a, j_b] = \varepsilon_{abc} j^c, & [j_a, p_b] = \varepsilon_{abc} p^c, \quad [p_a, p_b] = \varepsilon_{abc} z^c, \\ [j_a, z_b] = \varepsilon_{abc} z^c, & [p_a, z_b] = 0, \quad [z_a, z_b] = 0, \end{cases}$$

El álgebra “deformed bms3” (23) corresponde a un “infinite-dimensional lift” del álgebra de Maxwell (2+1)-dimensional.

$$\therefore S_E^{(2)} \times vir \rightarrow deformed \quad bms_3$$

$$Maxwell \quad \acute{a}\lg ebra \subseteq deformed \quad bms_3$$

Deformed bms_3 álgebra como un límite de vir^3

Considere el semigrupo

$$S_M^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\} \qquad (24)$$

Con la regla de multiplicación, pero sin cero.

$$\begin{array}{cccc}
* & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\
\lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\
\lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\
\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
J_m &\equiv l_{(m,0)} = \lambda_0 l_m \quad , \quad c_1 \equiv c_{00} = c_{11} = \lambda_0 c \\
P_m &\equiv l_{(m,1)} = \lambda_1 l_m \quad , \quad c_2 \equiv c_{01} = \lambda_1 c , \\
Z_m &\equiv l_{(m,2)} = \lambda_2 l_m \quad , \quad c_3 \equiv c_{02} = c_{11} = \lambda_2 c .
\end{aligned} \qquad (25)$$

$$
\begin{aligned}
[J_m, J_n] &= (m-n)J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
[J_m, P_n] &= (m-n)P_{(m+n)} + \frac{c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
[P_m, P_n] &= (m-n)Z_{(m+n)} + \frac{c_3}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (26) \\
[J_m, Z_n] &= (m-n)Z_{(m+n)} + \frac{c_3}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
[Z_m, Z_n] &= (m-n)Z_{(m+n)} + \frac{c_3}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
[Z_m, P_n] &= (m-n)P_{(m+n)} + \frac{c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

Fijando índices y haciendo el mismo cambio de base anterior, se obtiene el álgebra AdS-Lorentz en (2+1)-dimensiones.

$$\left.\begin{array}{l} Semisimple \\ extension \\ Poincaré \\ (AdS \oplus Lorentz) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} [j_a, j_b] = \varepsilon_{abc} j^c, & [j_a, p_b] = \varepsilon_{abc} p^c, \quad [p_a, p_b] = \varepsilon_{abc} z^c, \\ [j_a, z_b] = \varepsilon_{abc} z^c, & [p_a, z_b] = \varepsilon_{abc} p^c, \quad [z_a, z_b] = \varepsilon_{abc} z^c, \end{cases}$$

$$AdS \oplus Lorentz \quad \subseteq \quad vir^3$$

Haciendo el cambio de base

$$L_m = \frac{1}{2}(P_m + Z_m) \quad , \quad \bar{L}_m = \frac{1}{2}(P_m - Z_m), \quad \tilde{L}_m = \frac{1}{2}(J_m - Z_m) \quad (27)$$

Se obtiene tres copias del álgebra de Virasoro: vir^3

$$\left[L_m, L_n\right] = (m-n)L_{(m+n)} + \frac{c}{12}m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}$$

$$\left[\bar{L}_m, \bar{L}_n\right] = (m-n)\bar{L}_{(m+n)} + \frac{\bar{c}}{12}m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \qquad (28)$$

$$\left[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n\right] = (m-n)\tilde{L}_{(m+n)} + \frac{\tilde{c}}{12}m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}$$

con las extensiones centrales

$$c = \frac{1}{2}(c_2 + c_3) \quad , \quad \bar{c} = \frac{1}{2}(c_2 - c_3), \quad \tilde{c} = \frac{1}{2}(c_1 - c_3) \quad (29)$$

El álgebra vir^3 (26) corresponde a un “infinite-dimensional lift” de la extensión semisimple del álgebra de Poincaré en (2+1)-dimensiones.

$$\therefore S_M^{(2)} \times vir = vir \oplus vir \oplus vir \equiv vir^3$$

Haciendo una contracción de I.W. a vir^3

$$J_m \to J_m, \quad P_m \to \sigma P_m, \quad Z_m \to \sigma^2 Z_m$$
$$c_1 \to c_1, \quad c_2 \to \sigma c_2, \quad c_3 \to \sigma^2 c_3 \qquad (30)$$

$$y \quad haciendo \quad \sigma \to \infty$$

se obtiene deformed bms_3 álgebra (23). En efecto

$$[J_m, J_n] = (m-n)J_{(m+n)} + \frac{c_1}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$\cancel{\sigma}[J_m, P_n] = (m-n)\cancel{\sigma} P_{(m+n)} + \frac{\cancel{\sigma} c_2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$\cancel{\sigma}^2[P_m, P_n] = (m-n)\cancel{\sigma^2} Z_{(m+n)} + \frac{\cancel{\sigma^2} c_3}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \qquad (26)$$
$$\cancel{\sigma}^2[J_m, Z_n] = (m-n)\cancel{\sigma}^2 Z_{(m+n)} + \frac{\cancel{\sigma}^2 c_3}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$\sigma^4[Z_m, Z_n] = (m-n)\underset{0}{\cancel{\sigma}^2} Z_{(m+n)} + \underset{0}{\frac{\cancel{\sigma}^2 c_3}{12}} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$
$$\sigma^3[Z_m, P_n] = (m-n)\underset{0}{\cancel{\sigma}} P_{(m+n)} + \underset{0}{\frac{\cancel{\sigma} c_2}{12}} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

Generalización del álgebra bms_3

Consideramos el semigrupo

$$S_E^{(k-2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}\} \qquad (31)$$

Con la ley de multiplicación $\left(donde \quad \lambda_{k-1} := 0_S\right).$

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & si \quad \alpha+\beta \leq \quad k-2 \\ \lambda_{k-1} & si \quad \alpha+\beta > k-2 \end{cases} \qquad (32)$$

El álgebra de Virasoro $S_E^{(k-2)} - \exp andida$, será denotada como: $vir_{B_k} \quad en \quad (2+1)D$

$$\left[l_{(m,\alpha)}, l_{(n,\beta)}\right] = \begin{cases} (m-n)l_{(m+n,\alpha+\beta)} + \dfrac{c_{\alpha+\beta+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} & si \quad \alpha+\beta \leq k-2 \\ 0 & si \quad \alpha+\beta > k-2 \end{cases} \qquad (33)$$

$$donde \quad c_{\alpha+\beta+1} \equiv c_{\alpha\beta} = cK^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma}$$

La vir_{B_k} en $(2+1)-\dim ensiones$ contiene un Ideal abelianoe:

$$A = \left\{ \quad l_{(m,\tilde{\alpha})} \quad \right\} \ , \quad \tilde{\alpha} = \left[\frac{k}{2}\right],...,k-2 \qquad (34)$$

donde

$$\left[l_{(m,\tilde{\alpha})}, l_{(n,\tilde{\beta})}\right] = 0,$$

$$\left[l_{(m,\tilde{\alpha})}, l_{(n,\beta)}\right] = \in A + tér\min os \quad centrales. \qquad (35)$$

vir_{B_k} corresponde a bms_3 generalizada", y es "infinite dimensional lift" del álgebra B_k en (2+1)D.

Redefiniendo los operadores

$$J^{i}_{m} \equiv l_{(m,i)} = \lambda_i l_m \quad , \quad P^{\bar{i}}_{m} \equiv l_{(m,\bar{i})} = \lambda_{\bar{i}} l_m \, , \qquad (38)$$

donde

$$i = par \quad y \quad \bar{i} = impar.$$

i) Para k-2=2N, el abeliano ideal A es generado por: $k-1=2N+1 \Rightarrow \lambda_{k-1}=\lambda_{2N+1}=0_S$

$$\tilde{\alpha}=\left[\frac{k}{2}\right],\ldots,k-2 \qquad \tilde{\alpha}=\left[\frac{k}{2}\right]=(N+1),\ldots\ldots,(k-2)=2N$$

$$A=\begin{cases} P_m^{N+1},J_m^{N+2},\ldots,P_m^{2N-1},J_m^{2N} & para \quad N \quad par. \\ \\ J_m^{N+1},P_m^{N+2},\ldots,P_m^{2N-1},J_m^{2N} & para \quad N \quad impar. \end{cases} \qquad (36)$$

ii) Para k-2=2N+1, el abeliano ideal A es generado por: $k-1=2N+2 \Rightarrow \lambda_{k-1}=\lambda_{2N+2}=0_S$

$$\tilde{\alpha}=\left[\frac{k}{2}\right]=N+1,\ldots,(k-2)=2N+1$$

$$A=\begin{cases} P_m^{N+1},J_m^{N+2},\ldots,J_m^{2N},P_m^{2N+1} & para \quad N \quad par. \\ \\ J_m^{N+1},P_m^{N+2},\ldots,J_m^{2N},P_m^{2N+1} & para \quad N \quad impar. \end{cases} \qquad (37)$$

Podemos escribir vir_{B_k} en la forma

$$
\begin{aligned}
\left[J_m^i, J_n^j\right] &= (m-n)J_{m+n}^{i+j} + \frac{c_{i+j+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \quad para \quad i+j \le k-2, \\
\left[J_m^i, P_n^{\bar{j}}\right] &= (m-n)P_{m+n}^{i+\bar{j}} + \frac{c_{i+\bar{j}+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \quad para \quad i+\bar{j} \le k-2, \qquad (39) \\
\left[P_m^{\bar{i}}, P_n^{\bar{j}}\right] &= (m-n)P_{m+n}^{\bar{i}+\bar{j}} + \frac{c_{\bar{i}+\bar{j}+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \quad para \quad \bar{i}+\bar{j} \le k-2,
\end{aligned}
$$

Conclusión: Las álgebras B_k en (2+1)-dimensiones es una subálgebra del resultado anterior (39).

$$B_k = Span\left\{ J_0^i, J_1^i, J_{-1}^i, P_0^{\bar{i}}, P_1^{\bar{i}}, P_{-1}^{\bar{i}} \right\} \subseteq vir_{B_k} \qquad (40)$$

$$Para \quad k = 3, \quad B_3 \rightarrow bms_3$$

$$Para \quad k = 4, \quad B_4 \rightarrow \quad deformed \quad bms_3$$

$$vir_{B_k} \rightarrow \text{infinite} \quad \text{dimensional} \quad lift \quad B_k$$

Generalización del álgebra 2D-conformal.

Ahora consideramos el semigrupo

$$S_M^{(k-2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2}\} \qquad (41)$$

Con la ley de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & si \quad \alpha+\beta \leq \quad k-2 \\ \lambda_{\alpha+\beta-2\left[\frac{k-1}{2}\right]} & si \quad \alpha+\beta > k-2 \end{cases} \qquad (42)$$

El álgebra de Virasoro $S_M^{(k-2)} - \exp andida$, será denotada como $bir_{C_k} \quad en \quad (2+1)D$

$$\left[l_{(m,\alpha)}, l_{(n,\beta)}\right] = \begin{cases} (m-n) l_{(m+n,\alpha+\beta)} + \dfrac{c_{\alpha+\beta+1}}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} & si \quad \alpha+\beta \leq k-2 \\ (m-n) l_{\left(m+n,\alpha+\beta-2\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)} + \dfrac{c_{\alpha+\beta+1}}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \; si & \alpha+\beta > k-2 \end{cases} \qquad (43)$$

Usando los generadores

$$J_m^i \equiv l_{(m,i)} = \lambda_i l_m \quad , \quad P_m^{\bar{i}} \equiv l_{(m,\bar{i})} = \lambda_{\bar{i}} l_m \, ,$$

$$tenemos \quad vir_{C_k} \; :$$

$$\left[J_m^i, J_n^j\right] = (m-n) J_{m+n}^{\{i+j\}} + \frac{c_{\{i+j\}+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}$$

$$\left[J_m^i, P_n^{\bar{j}}\right] = (m-n) P_{m+n}^{\{i+\bar{j}\}} + \frac{c_{\{i+\bar{j}\}+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0} \qquad (44)$$

$$\left[P_m^{\bar{i}}, P_n^{\bar{j}}\right] = (m-n) P_{m+n}^{\{\bar{i}+\bar{j}\}} + \frac{c_{\{\bar{i}+\bar{j}\}+1}}{12} m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}$$

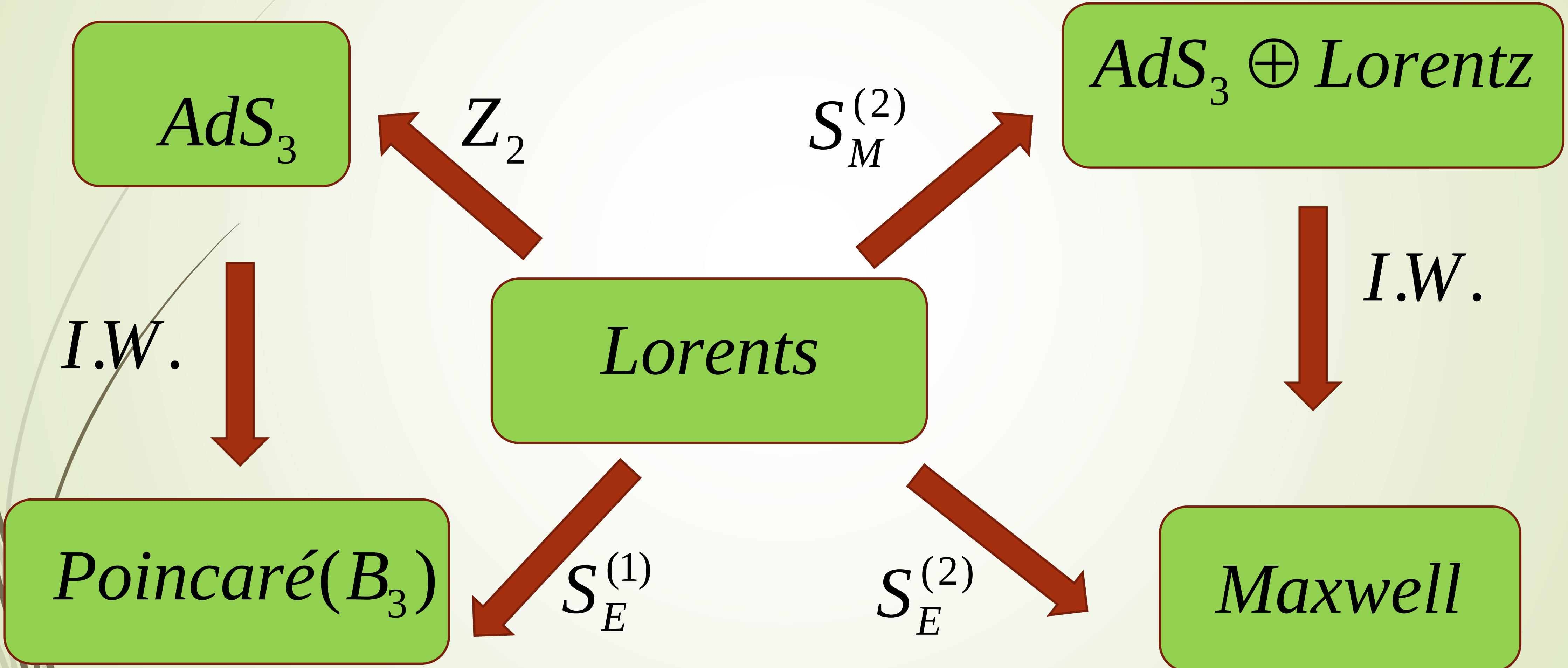
donde

$$\{i+j\} = \begin{cases} i+j & si \quad i+j \le k-2 \\ i+j-2\left[\dfrac{k-1}{2}\right] & si \quad i+j > k-2 \end{cases} \qquad (45)$$

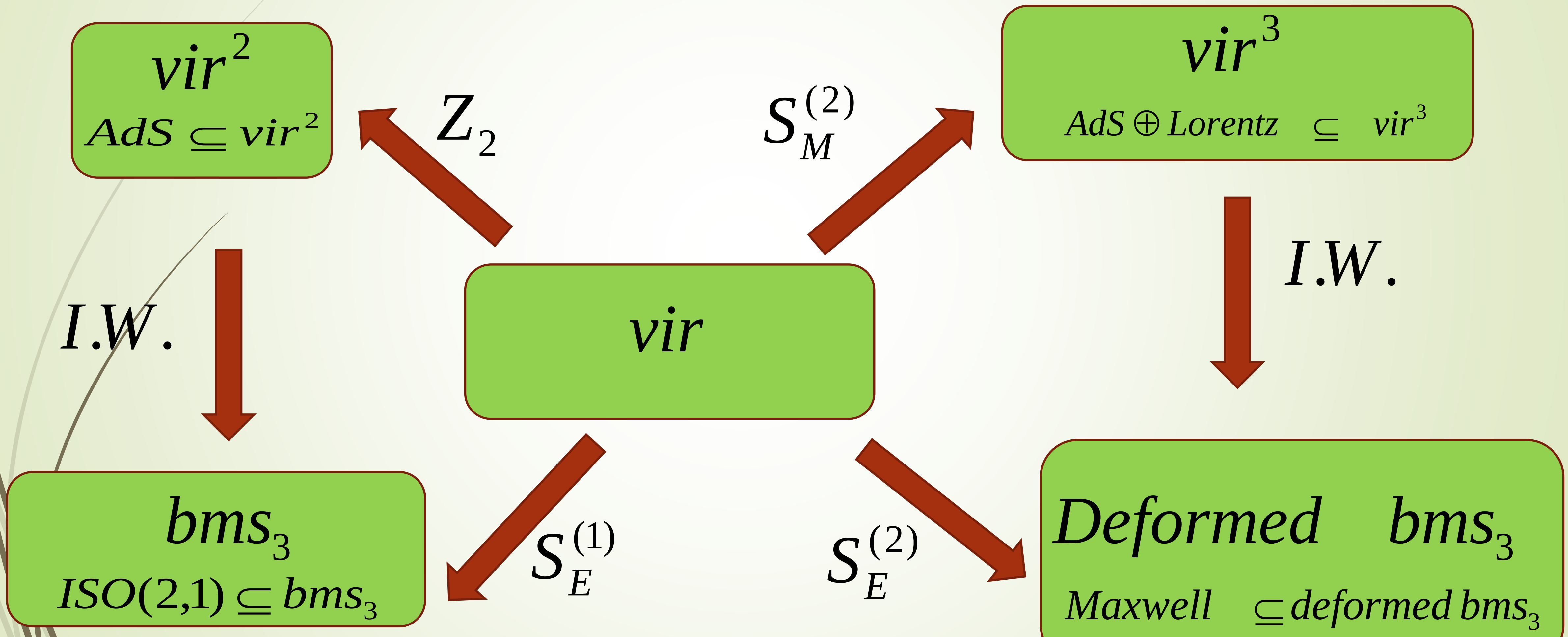
$$C_k = Span\left\{ J_0^i, J_1^i, J_{-1}^i, P_0^{\bar{i}}, P_1^{\bar{i}}, P_{-1}^{\bar{i}} \right\} \subseteq vir_{C_k} \qquad (46)$$

$$vir_{C_k} \to \inf inite \quad \dim ensional \quad lift \quad C_k$$

Comentarios



Comentarios



Comentarios (I.W. válido en algunos casos infinito-imensional)

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Generalized} \quad 2D-conformal \; (vir_{C_k}) \arrow[dd, "I.W."] \\
vir \arrow[ur, "S_M^{(k-2)}"] \arrow[dr, "S_E^{(k-2)}"'] & \\
 & \text{Generalized} \quad bms_3 \, (vir_{B_k})
\end{tikzcd}
$$

Infinite dimensional $D_k - like$ álgebra.

$$k = 5 \quad \to \quad vir^2 \oplus \to bms_3 \xrightarrow{C.B_1} \quad 2D \quad Conformal$$

$$\xrightarrow{C.B_2} \quad bms_3$$

$$k = 6 \quad \to \quad vir^2 \oplus \to deformded \qquad bms_3$$

Trabajos futuros.

- Estudiar la S-expansión para extensiones Higher spin de la gravedad en (2+1)D.
- Extender la S-expansión para supersimetrías N-extendidas de simetrías asintóticas.
- Etc.

¡¡ Gracias por su atención..!!

El álgebra de Kac-Moody

$$\left[j_m^a, j_n^b\right] = if^{ab}{}_c\, j^c_{m+n} + kmg^{ab}\delta_{m+n,0}$$

Contrucción de Sugawara por combinaciones biliniales de los generadores de K-M

$$l_m = \frac{1}{2(k+C_g)} g_{ab} \sum_n : j_n^a\, j^b{}_{m-n} :$$

$$\sum_n : j_n^a\, j^b{}_{m-n} := \sum_{n\le -1} j_n^a\, j^b_{m-n} + \sum_{n>-1} j^b_{m-n}\, j_n^a \qquad normal \quad ordering$$

$$[l_m, l_n] = (m-n) l_{m+n} + \frac{c}{12} m\left(m^2 - 1\right)\delta_{m+n,0}$$