



New static wormhole solutions with linear shape functions

Luis A. Liempi Necul
Mauricio Cataldo M.
Departamento de Física
Universidad de Concepción



INTRODUCCIÓN

Solución de Morris & Thorne

Función de forma lineal

Estudio de las geodésicas

SOLUCIÓN DE MORRIS & THORNE

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

- ▶ $\phi(r)$, función redshift ($\phi(r) = 0$)
- ▶ $b(r)$, función de forma, debe satisfacer

$$\frac{b(r)}{r} \leq 1, \quad (2)$$

- ▶ En la garganta $r_{min} = r_0$

$$b(r_0) = r_0, \quad (3)$$

- ▶ Para que conecte dos regiones asintóticamente planas

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0. \quad (4)$$

FUNCIÓN DE FORMA LINEAL

Vamos a considerar una función de forma con dependencia lineal en la coordenada radial.

$$b(r) = \beta r + \alpha, \quad (5)$$

donde α y β son constantes arbitrarias. Evaluando en la garganta

$$b(r_0) = \beta r_0 + \alpha = r_0, \quad (6)$$

encontramos que la constante α toma la forma

$$\alpha = (1 - \beta) r_0. \quad (7)$$

Entonces la función de forma es dada por

$$b(r) = (1 - \beta) r_0 + \beta r, \quad (8)$$

Notamos que la distancia radial propia

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}, \quad (9)$$

en la garganta siempre se satisface la relación $b'(r_0) \leq 1$. En particular esto implica que $\beta \leq 1$ para la función (8).

La métrica es dada por

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} - r^2 d\Omega_2^2, \quad (10)$$

debemos requerir que $\beta < 1$. Si la función redshift $e^{2\phi(r)} \rightarrow cte$ para $r \rightarrow \infty$, entonces el límite asintótico para la métrica (10)

EL DEFECTO ANGULAR

Si la función redshift $e^{2\Phi(r)} \rightarrow cte$ para $r \rightarrow \infty$, entonces el límite asintótico la métrica (10) toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{(1-\beta)} - r^2 d\Omega^2, \quad (11)$$

Esta métrica describe un espaciotiempo con un déficit de ángulo sólido (ó exceso). Podemos ver esto directamente haciendo un reescalamiento,

$$\rho^2 = \frac{r^2}{1-\beta}, \quad (12)$$

Entonces, la métrica (11) toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - (1-\beta) \rho^2 d\Omega^2. \quad (13)$$

EL DEFECTO ANGULAR

$$ds^2 = dt^2 - d\varrho^2 - (1 - \beta) \varrho^2 d\Omega^2. \quad (14)$$

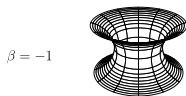
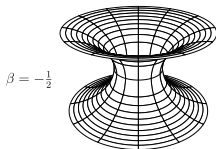
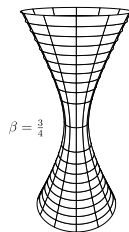
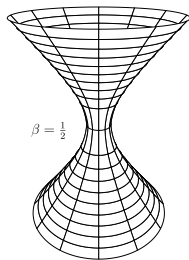
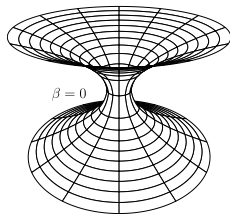
Esta forma de la métrica muestra explícitamente la presencia de un

- ▶ Déficit de ángulo sólido para $0 < \beta < 1$ (geometría que conecta dos regiones asintóticamente no planas),
 $r_0 \rightarrow \infty$,
- ▶ un exceso de ángulo sólido para $\beta < 0$, $r_0 \rightarrow r_{max}$.
- ▶ Para $\beta = 0$, obtenemos la métrica de Minkowski.

Diagramas de embebimiento para distintos valores del parámetro β

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} - r^2 d\Omega_2^2, \quad (15)$$

EMBEDDING



LAS GEODÉSICAS

Estudiaremos el comportamiento de las geodésicas para distintos valores del parámetro β

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[e^{2\phi(r)} \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \right], \quad (16)$$

El momento conjugado y la ecuación de movimiento,

$$\Pi_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (17)$$

$$\dot{\Pi}_q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (18)$$

Las constantes de movimiento para este lagrangiano considerando una partícula confinada en el plano $\theta = \pi/2$,

$$\Pi_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = E \quad (19)$$

$$(20)$$

$$\Pi_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi} = L \quad (21)$$

Volviendo al lagrangiano

$$2\mathcal{L} = \dot{t} - \frac{\dot{r}^2}{(1-\beta)\left(1-\frac{r_0}{r}\right)} - r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (22)$$

$$E^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1-\beta)\left(1-\frac{r_0}{r}\right)} - \frac{L}{r^2} = h \quad (23)$$

Donde, $h = 1$ para las geodésicas tipo tiempo y $h = 0$ para geodésicas nulas.

$$E^2 = h + \frac{\dot{r}^2}{(1-\beta)\left(1-\frac{r_0}{r}\right)} + \frac{L}{r^2} \quad (24)$$

GEODÉSICAS CON $L = 0$

Consideramos geodésicas tipo tiempo, con $L = 0$ y las condiciones iniciales (t_i, r_i) ,

$$E^2 = 1 + \frac{v_i^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r_i}\right)} \quad (25)$$

Y utilizando 24 obtenemos

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{r_i}}} v_i^2 = \dot{r} \quad (26)$$

Notamos que, una partícula que parte con $v_i > 0$ en el infinito tiende a una velocidad máxima $v_{max} = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_i}}}$.

Si la partícula parte del reposo, $v_i = 0$, entonces $\dot{r} = 0$ y $r = r(\tau) = cte$, la partícula se mantiene en reposo en la posición inicial r_i .

Necesitamos una velocidad inicial $v_i \neq 0$ para que la partícula

GEODÉSICAS RADIALES

Necesitamos una velocidad inicial $v_i \neq 0$ para que la partícula caiga hacia la garganta.

De la Ec.26 notamos que las geodésicas tipo tiempo parten de $r_i > r_0$ con una velocidad inicial $v_i \neq 0$, llegando a la garganta con una velocidad cero ($r = r_0$).

Además notamos a partir de Ec.25, $E \geq 1$. Con $E = 1$, la partícula queda en reposo.

Otra característica de esta configuración, es que es repulsiva en todas partes. Esto viene de derivar la Ec.26,

$$\ddot{r} = \frac{(E^2 - 1)(1 - \beta)r_0}{2r^2}, \quad \beta < 1 \quad (27)$$

GEODÉSICAS RADIALES

Esta expresión se puede asociar a una pseudo ley de Newton,

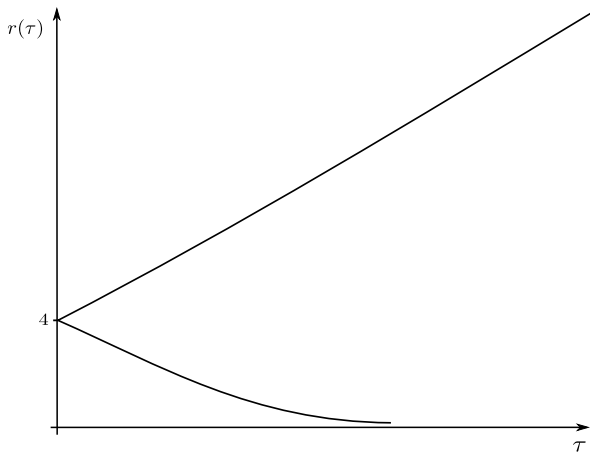
$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V'_{eff}}{\partial r} \quad (28)$$

Esto es válido solo para partículas que se mueven radialmente. Para ver el comportamiento de las geodésicas tipo tiempo, resolvemos la Ec. 26

$$\tau(r) = \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}{2v_i} \left(2\sqrt{r^2 - r_0 r} + r_0 \ln \left(\frac{r_0}{2} \right) + r + \sqrt{r^2 - r_0 r} \right) + C \quad (29)$$

Esta Ec. muestra dos ramas de soluciones para $r(\tau)$. Por un lado geodésicas que se alejan alcanzando el infinito y geodésicas que llegan a la garganta con velocidad cero.

GEODÉSICAS RADIALES



La posición inicial es $r_i = 4$.

GEODÉSICAS CON $L \neq 0$

De la Ec.24 consideramos $L \neq 0$, $h = 1$ y las condiciones iniciales para la posición (r_i, φ_i) , velocidad radial \dot{r} y velocidad angular $\dot{\varphi}$, entonces

$$E^2 = 1 + \frac{v_i^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r_i}\right)} + \frac{L}{r_i^2} \quad (30)$$

reemplazando

$$\left(L^2 \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{v_i^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} \right) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) (1 - \beta) = \dot{r}^2 \quad (31)$$

Notamos que el parámetro β sí influye las trayectorias de las geodésicas no circulares.

Las geodésica circulares ocurren cuando $\frac{dr}{d\tau} = 0$.

GEODÉSICAS CON $L \neq 0$

La aceleración para \dot{r} es dada por

$$\ddot{r} = (1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{L^2}{r^3} \quad (32)$$

Esto implica que $\ddot{r} \geq 0$ y anula en $r = r_0$, entonces las geodésicas circulares existen solo en la garganta. Para cualquier otra posición $r > r_0$ una partícula de prueba es acelerada hacia la dirección r positiva.

La Ec.31 muestra que una partícula de prueba tiene una velocidad cero en $r = r_0$ y en

$$r_{zero} = \left(\frac{1}{r_i^2} + \frac{v_i^2}{L^2 (1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r_i}\right)} \right)^{1/2} > 0 \quad (33)$$

Sí se satisface $r_{zero} > r_0$, el radio r_{zero} representa a una geodésica que comienza en $r_i > r_0$ con velocidad $v_i < 0$ y $v_{\varphi i} \neq 0$ que es un punto de retorno.

GEODÉSICAS CON $L \neq 0$

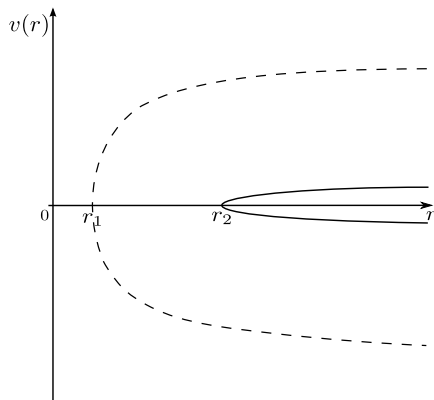
Esto implica que las geodésicas tipo tiempo no cruzan la garganta.

Algo más que podemos notar de la Ec.31, es que existe un límite de velocidad para una partícula que se aleja del agujero de gusano,

$$v_{limit} = \pm \left(\frac{L^2 (1 - \beta)}{r_i^2} + \frac{v_i^2}{1 - \frac{r_0}{r_i}} \right)^{-1/2} \quad (34)$$

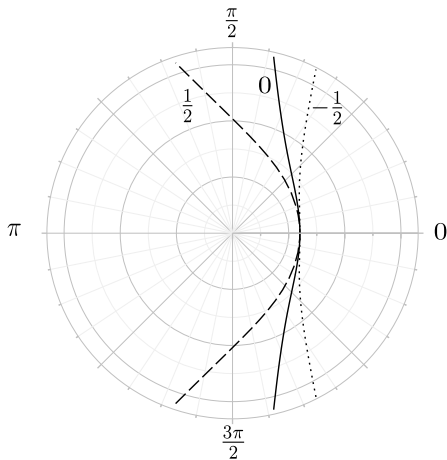
GEODÉSICAS CON $L \neq 0$

Comportamiento de la velocidad radial



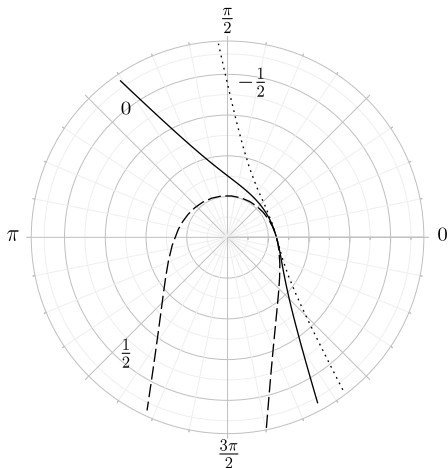
GEODÉSICAS CON $L \neq 0$

El efecto del parámetro β sobre la geometría y con $v_i = 0$ se muestra en la siguiente figura,



GEODÉSICAS CON $L \neq 0$

Ahora con una velocidad $v_i \neq 0$,



¿HAY GEODÉSICAS QUE CRUZAN LA GARGANTA?

Haremos un reescalamiento en la coordenada radial

$$dl = \pm \frac{dr}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} \quad (35)$$

Entonces

$$l(r) = \pm \frac{2\sqrt{r(r-r_0)} + r_0 \ln \left(\frac{-\frac{1}{2}r_0 + r + \sqrt{r(r-r_0)}}{r_0/2} \right)}{2\sqrt{1-\beta}} \quad (36)$$

que nos lleva a la siguiente Ec,

$$\dot{l}^2 = E^2 - 1 - \frac{L^2}{r(l)^2}, \quad E > 1 \quad (37)$$

Para encontrar el punto de retorno, utilizamos la condición $\dot{l} = 0$ y nos lleva a la condición

$$r_{zero}(l) = \frac{L}{\sqrt{E^2 - 1}} \geq r_0 \quad (38)$$

En general l tendrá una forma

$$l_{zero} \rightarrow \pm \sqrt{F\left(\frac{L}{\sqrt{E^2 - 1}}, r_0\right)} \quad (39)$$

Aquí tenemos dos casos interesantes:

$$F\left(\frac{L}{\sqrt{E^2 - 1}}, r_0\right) > 0 \quad (40)$$

l_{zero} es real y representa un punto de retorno.
Por otro lado,

$$F\left(\frac{L}{\sqrt{E^2 - 1}}, r_0\right) < 0 \quad (41)$$

En este caso las geodésicas cruzarían la garganta.

GEODÉSICAS QUE CRUZAN LA GARGANTA

Para encontrar valores de l_{zero} , reemplazamos

$$r_{zero}(l) = \frac{L}{\sqrt{E^2 - 1}} \geq r_0 \text{ en la expresión de } l(r)$$

$$l_{zero} = \pm \frac{1}{2\sqrt{1 - \beta}} \left(2\sqrt{\frac{L^2}{E^2 - 1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2 - 1}}} + r_0 \ln \left(-1 + \frac{2L}{r_0 \sqrt{E^2 - 1}} + \frac{2}{r_0} \sqrt{\frac{L^2}{E^2 - 1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2 - 1}}} \right) \right) \quad (42)$$

Tendremos un punto de retorno si,

$$\frac{L^2}{E^2 - 1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2 - 1}} \geq 0 \quad (43)$$

$$\frac{2L}{r_0 \sqrt{E^2 - 1}} + \frac{2}{r_0} \sqrt{\frac{L^2}{E^2 - 1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2 - 1}}} > 1 \quad (44)$$

Luego, si estas condiciones no se satisfacen, el punto de retorno no existe y una partícula que sigue una geodésica cruza la garganta del agujero de gusano.

Gracias....