Motivación

Límite no relativista de la acción E-C-S

Álgebras de Galileo generalizadas

Gravedad Newton–Chern–Simons

Conclusiones

CosmoConce 2016
Álgebras de Galileo generalizadas

Gustavo Rubio González

Universidad de Concepción

7 de abril de 2016

Motivación

- La gravedad de Einstein puede ser obtenida "gaugeando" el álgebra de Poincaré.
- La formulación de Newton–Cartan de la teoría de la gravedad de Newton puede ser obtenida a partir del "gaugeo" de la llamada álgebra de Bargmann.
- La gravedad Einstein–Chern–Simons en 5 dimensiones obtenida "gaugeando" el álgebra de Poincaré generalizada $\mathfrak{B}_5$, desemboca en la teoría general de la relatividad en un determinado límite*.

*F. Izaurieta, P.Minning, E. Rodríguez, A. Pérez and P. Salgado, *Standard General Relativity from Chern-Simons Gravity*. Phys. Lett. B **678** (2009) 213

Con estas ideas aparece la pregunta natural, ¿El límite no relativista de la gravedad Einstein-Chern-Simons en el contexto de la teoría de Newton-Cartan, respetará el principio de correspondencia?

Para responder esto se considerará:

1. La obtención del límite no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons.
2. La construcción de las álgebras no relativistas correspondientes a las álgebras Poincaré y las álgebras AdS-Lorentz generalizadas.
3. La construcción de lagrangeanos Chern-Simons para las correspondientes álgebras no relativistas.
4. Verificar si en algún límite se recupera la gravedad de Newton.

Álgebras de Poincaré y Ads–Lorentz generalizadas

Las álgebras de Poincaré generalizadas también llamadas álgebras B corresponden a la $S_E^{(N)}$ expansión resonante y 0_s-reducida del álgebra AdS, donde la ley de multiplicación del semigrupo viene dada por:

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & si \quad \alpha+\beta \leq N \\ \lambda_{N+1} & si \quad \alpha+\beta < N \end{cases}$$

Las álgebras AdS-Lorentz generalizadas corresponden a la $S_M^{(N)}$ expansión resonante del álgebra AdS, donde la ley de multiplicación del semigrupo viene dada por:

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & si \quad \alpha+\beta \leq N \\ \lambda_{\alpha+\beta-2\left[\frac{N+1}{2}\right]} & si \quad \alpha+\beta < N \end{cases}$$

Estas álgebras están relacionadas por una contracción generalizada de Inönü-Wigner: las álgebras de Poincaré generalizadas pueden ser obtenidas mediante contracción a partir de las álgebras AdS–Lorentz generalizadas. Esta contracción consiste en reescalar los generadores del álgebra por un parámetro real elevado a la potencia de la etiqueta del elemento del semigrupo usado para realizar la S-expansión[**].

Es posible demostrar que sus versiones no relativistas siguen respetando esta relación.

[**] P. Salgado and S. Salgado Phys. Lett. B 728 (2014) 5

Álgebras de Galileo generalizadas
Gustavo Rubio González
Motivación
Límite no relativista de la acción E-C-S
Álgebras de Galileo generalizadas
Gravedad Newton–Chern–Simons
Conclusiones

La acción Chern-Simons en 5 dimensiones invariante bajo el álgebra $\mathfrak{B}_5$

$$L_{\mathrm{ChS},B_5} = \alpha_1 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \varepsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2 l^2 k^{ab} R^{cd} T^{\ e} + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right)$$

cuyas ecuaciones de movimiento al considerar $k^{ab} = 0$ y $T^a = 0$ son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcde}(2\alpha_3 R^{ab} e^c e^d + \alpha_1 l^2 R^{ab} R^{cd}) &= \kappa \frac{\delta L_M}{\delta e^e}, \\ \alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} &= \kappa \frac{\delta L_M}{\delta h^e}, \\ \alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{cd} D h^e &= 0, \end{aligned}$$

Estas ecuaciones entregan soluciones en cosmología de expansión acelerada al introducir la métrica del modelo FLRW[***],[****].

[***] F. Gomez, P. Minning, P. Salgado, Phys. Rev. D 84 (2011) 063506

[****] M. Cataldo, J. Crisostomo, S. del Campo, F. Gomez, C. Quinzacara, P. Salgado, Eur. Phys. J. C 74 (2014) 3087.

Si se tiene que el campo gravitacional es débil, entonces el espacio puede ser considerado ligeramente curvado, por lo cual podemos considerar que la métrica puede escribirse en la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , \qquad |h_{\mu\nu}| << 1 \ , \qquad \eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, ..., 1)$$

Al introducir esta métrica en las ecuaciones de movimiento obtenemos las siguiente expresión

$$R_{00} = \frac{1}{12\alpha_3}\left(\beta_1\rho - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\beta_2\rho^{(h)}\right)$$

donde se ha considerado el tensor energía momentum para un fluído perfecto.

Álgebras de Galileo generalizadas
Gustavo Rubio González
Motivación
Límite no relativista de la acción E-C-S
Álgebras de Galileo generalizadas
Gravedad Newton–Chern–Simons
Conclusiones

De la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 0,$$

que en el límite no relativista

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 = -\Gamma^\mu_{00},$$

en un campo gravitacional débil $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y además asumiendo que el campo es estático i.e., $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\delta^i{}_j\partial_j h_{00}$$

ecuación que coincide con la ley de Newton $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\phi$ considerando $h_{00} = -2\phi$, por otro lado $\Gamma^i_{00} = \delta^{ij}\partial_j\phi$.

Así la única componente no nula del tensor de Riemann es

$$R^{i}_{0j0} = \delta^{ik}\partial_k\partial_j\phi$$

Finalmente

$$\nabla^2\phi = \frac{2}{3}\left(k_1\rho - \alpha k_2\rho^{(h)}\right)$$

donde $k_1 = \frac{\beta_1}{8\alpha_3}$, $k_2 = \frac{\beta_2}{24\alpha_3}$ y $\alpha = \frac{3\alpha_1}{\alpha_3}$. Si escojemos la elección $\alpha = 0$ o $k_2 = 0$ se obtiene la ecuación de Poisson si consideramos que $k_1 = 8\pi G$.

Álgebras de Galileo generalizadas

En particular encontraremos la versión no relativista del álgebra $\mathfrak{B}_5$. (El mecanismo es análogo para la familia de álgebras de Galileo generalizadas)

Separando la parte espacial y temporal de los generadores $\{P_a, J_{ab}, Z_a, Z_{ab}\}$ y luego considerando el siguiente reescalamiento

$$\begin{aligned} K_i &\longrightarrow c^{-1} J_{i0} & P_i &\longrightarrow R^{-1} P_i \\ H &\longrightarrow cR^{-1} P_0 - c^2 M & Z_{i0} &\longrightarrow c^{-1} Z_{i0} \\ Z_i &\longrightarrow R^{-1} Z_i & Z_0 &\longrightarrow cR^{-1} Z_0 - c^2 N \end{aligned}$$

Tomando el límite $c, R \to \infty$, donde $\nu = \frac{c}{R}$, se encuentra el álgebra $\mathcal{G}\mathfrak{B}_5$ que coincide con la $S_E^{(N)}$ expansión resonante y 0_s-reducida del álgebra de Newton–Hooke.

$$
\begin{aligned}
[J_{ij}, J_{kl}] &= \eta_{kj} J_{il} + \eta_{lj} J_{ki} - \eta_{ki} J_{jl} - \eta_{li} J_{kj}, \\
[J_{ij}, K_k] &= \eta_{jk} K_i - \eta_{ik} K_j, \quad [K_i, P_j] = -\delta_{ij} M, \\
[J_{ij}, P_k] &= \eta_{jk} P_i - \eta_{ik} P_j, \quad [K_i, H] = -P_i, \\
[P_i, H] &= \nu^2 Z_{i0}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[J_{ij}, Z_{kl}] &= \eta_{kj} Z_{il} + \eta_{lj} Z_{ki} - \eta_{ki} Z_{jl} - \eta_{li} Z_{kj}, \\
[J_{ij}, Z_{k0}] &= \eta_{jk} Z_{i0} - \eta_{ik} Z_{j0}, \quad [K_i, Z_j] = -\delta_{ij} N, \\
[Z_{ij}, K_k] &= \eta_{jk} Z_{i0} - \eta_{ik} Z_{j0}, \quad [K_i, Z_0] = -Z_i, \\
[J_{ij}, Z_k] &= \eta_{jk} Z_i - \eta_{ik} Z_j, \quad [Z_{i0}, P_j] = -\delta_{ij} N, \\
[Z_{ij}, P_k] &= \eta_{jk} Z_i - \eta_{ik} Z_j, \quad [Z_{i0}, H] = -Z_i,
\end{aligned}
$$

Gaugeo del álgebra $\mathcal{GB}_5$

La conexión asociada al álgebra $\mathcal{GB}_5$ es dada por:

$$
\begin{aligned}
A = & \frac{v}{l}\tau H + \frac{1}{l}e^{i}P_{i} + \frac{v}{l}h^{0}Z_{0} + \frac{1}{l}h^{i}Z_{i} + \frac{1}{vl}mM + \frac{1}{vl}nN \\
& + \frac{1}{v}w^{i}K_{i} + \frac{1}{v}k^{i}Z_{i0} + \frac{1}{2}w^{ij}J_{ij} + \frac{1}{2}k^{ij}Z_{ij}
\end{aligned}
$$

donde l y v son parámetros que tienen dimensiones de longitud y de velocidad respectivamente.

La correspondiente curvatura

$$
\begin{aligned}
F = & \frac{v}{l}d\tau H + \frac{1}{l}(T^{i} - w^{i}\tau)P_{i} + \frac{v}{l}dh^{0}Z_{0} + \frac{1}{l}(Dh^{i} - w^{i}h^{0} - k^{i}\tau + k^{i}{}_{j}e^{j})Z_{i} \\
& + \frac{1}{vl}(dm - w^{i}e_{i})M + \frac{1}{vl}(dn - w^{i}h_{i} - k^{i}e_{i})N + \frac{1}{v}Dw^{i}K_{i} \\
& + \frac{1}{v}(Dk^{i} + k^{i}{}_{j}w^{j})Z_{i0} + \frac{1}{2}R^{ij}J_{ij} + \frac{1}{2}Dk^{ij}Z_{ij}
\end{aligned}
$$

Es posible encontrar los tensores invariantes de $\mathcal{G}\mathfrak{B}_5$ a partir del álgebra de Newton Hooke, por el mecanismo de S-expansión*****.

$$\langle J_{ij} J_{kl} M \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_1 l v \epsilon_{ijkl}, \quad \langle J_{ij} P_k K_l \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_1 l v \epsilon_{ijkl}, \quad \langle J_{ij} Z_{kl} M \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_3 l v \epsilon_{ijkl},$$

$$\langle Z_{ij} P_k K_l \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_3 l v \epsilon_{ijkl}, \quad \langle J_{ij} P_k Z_{l0} \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_3 l v \epsilon_{ijkl}, \quad \langle J_{ij} J_{kl} N \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_3 l v \epsilon_{ijkl},$$

$$\langle J_{ij} Z_k K_l \rangle = -\frac{4}{3}\alpha_3 l v \epsilon_{ijkl}$$

***** F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, *Expanding Lie (super) algebras through abelian semigroups*, J. Math. Phys. **47** (2006) 123512

Álgebras de Galileo generalizadas
Gustavo Rubio González
Motivación
Límite no relativista de la acción E-C-S
Álgebras de Galileo generalizadas
Gravedad Newton–Chern–Simons
Conclusiones

El lagrangeano Chern–Simons para nuestra álgebra no relativista

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{ChS},G_{B_5}} = \alpha_1\epsilon_{ijkl}\Big(&-2R^{ij}T^k\omega^l - \frac{4}{3}R^{ij}\omega^k\omega^l\tau + 2R^{ij}D\omega^k e^l - R^{ij}R^{kl}m\Big) \\
+\alpha_3\epsilon_{ijkl}\Big(&\frac{4}{3}\nu^2R^{ij}e^k e^l\tau - 2R^{ij}Dh^k\omega^l - \frac{4}{3}R^{ij}k^k\omega^l\tau - \frac{4}{3}R^{ij}\omega^k\omega^l\hat{\tau} \\
&+2R^{ij}D\omega^k h^l - \frac{4}{3}Dk^{ij}T^k\omega^l - Dk^{ij}\omega^k\omega^l\tau - R^{ij}k^{kl}dm - \frac{2}{3}R^{ij}k^{kl}e^m\omega_m \\
&-\frac{2}{3}R^{ij}\omega^k_{\ m}k^{ml}m - \frac{4}{3}k^{ij}T^kD\omega^l - k^{ij}D\omega^k\omega^l\tau - 2R^{ij}T^kk^l - \frac{4}{3}R^{ij}\omega^kk^l\tau \\
&+\frac{2}{3}R^{ij}k^{km}\omega_m e^l + \frac{2}{3}\omega^i_{\ m}k^{jm}D\omega^k e^l - R^{ij}R^{kl}n - 2R^{ij}\omega^{km}k_m e^l\Big)
\end{aligned}
$$

Imponiendo $k^{ij} = k^i = 0$ en analogía a como se hizo para obtener el límite de no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons.

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{ChS},G_{B_5}} = {} & \alpha_1 \epsilon_{ijkl} \left(-2R^{ij} T^k \omega^l - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k \omega^l \tau + 2R^{ij} D\omega^k e^l - R^{ij} R^{kl} m \right) \\
& + \alpha_3 \epsilon_{ijkl} \left(\frac{4}{3} \nu^2 R^{ij} e^k e^l \tau - 2R^{ij} Dh^k \omega^l - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k \omega^l \hat{\tau} + 2R^{ij} D\omega^k h^l - R^{ij} R^{kl} n \right)
\end{aligned}
$$

La variación de este lagrangeano nos entrega las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\epsilon_{ijkl}(-\frac{4}{3}\alpha_1 R^{ij}\omega^k\omega^l + \frac{4}{3}\nu^2\alpha_3 R^{ij}e^k e^l) = \kappa\frac{\delta L_M}{\delta\tau}$$

$$\frac{4}{3}\alpha_3\epsilon_{ijkl0}R^{ij}\omega^k\omega^l = -\kappa\frac{\delta L_M}{\delta\hat{\tau}}$$

$$4\epsilon_{ijkl}\left(\alpha_1 R^{ij}D\omega^k - \frac{2}{3}\nu^2\alpha_3 R^{ij}e^k\tau\right) = \kappa\frac{\delta L_M}{\delta e^l}$$

$$2\alpha_3\epsilon_{ijkl}R^{ij}D\omega^k = \kappa\frac{\delta L_M}{\delta h^l}$$

$$\alpha_1\epsilon_{ijkl}R^{ij}R^{kl} = -\kappa\frac{\delta L_M}{\delta m}$$

$$\alpha_3\epsilon_{ijkl}R^{ij}R^{kl} = -\kappa\frac{\delta L_M}{\delta n}$$

$$4\epsilon_{ijkl}\left(\frac{2\alpha_1}{3}R^{ij}\omega^k\tau - \alpha_1 R^{ij}T^k + \frac{2\alpha_3}{3}R^{ij}\omega^k\hat{\tau} - \alpha_3 R^{ij}Dh^k\right) = \kappa\frac{\delta L_M}{\delta\omega^l}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijkl}\Big(&-2\alpha_1 R^{km}e_m\omega^l - 4\alpha_1 T^k D\omega^l - \frac{4\alpha_1}{3}\omega^k\omega^l d\tau - \frac{8\alpha_1}{3}D\omega^k\omega^l\tau + 2\alpha_1 R^{km}\omega_m e^l\\ &-2\alpha_1 R^{kl}dm + \frac{8}{3}\nu^2\alpha_3 T^k e^l\tau + \frac{4\alpha_3}{3}e^k e^l d\tau - 2\alpha_3 R^{km}h_m\omega^l - 4\alpha_3 Dh^k D\omega^l\\ &-\frac{4\alpha_3}{3}\omega^k\omega^l d\hat{\tau} - \frac{8\alpha_3}{3}D\omega^k\omega^l\hat{\tau} + 2\alpha_3 R^{km}\omega_m h^l - \alpha_3 R^{kl}dn\Big) = \kappa\frac{\delta L_M}{\delta\omega^{ij}}\end{aligned}$$

Donde las primeras cuatro ecuaciones corresponden a la versión no relativista de las ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones que son a segundo orden en la curvaturas se reducen en el límite de campo gravitacional débil al considerar $\frac{\delta L_M}{\delta m} = \frac{\delta L_M}{\delta n} = 0$. Las últimas dos ecuaciones corresponden a las versiones no relativistas de la torsión. Al usar las primeras dos ecuaciones obtenemos el

resultado

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2\nu^2}(k_1 \rho - \alpha k_2 \rho^{(h)}),$$

donde las constantes $k_1 = \frac{\beta_1}{8\alpha_3} = 8\pi G$, $k_2 = \frac{\beta_2}{24\alpha_3}$ y $\alpha = \frac{3\alpha_1}{\alpha_3}$. Este resultado coincide en el encontrado en el límite no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons si $\nu = \frac{3}{2}$.

La forma de la ecuación de Poisson generalizada obtenida sugiere una relación con la teoría MOND construída por Milgrom y Bekenstein, la cual esta basada en el lagrangeano ******

$$L_{MOND} = \frac{-a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{\left|\vec{\nabla}\phi\right|}{a_0^2}\right) - \rho\phi$$

La correspondiente ecuación para ϕ es

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\mu\left(\frac{\left|\vec{\nabla}\phi\right|}{a_0}\vec{\nabla}\phi\right)\right] = 4\pi G\rho$$

Donde μ corresponde a la función interpolante $\mu(\sqrt{y}) = \frac{df(y)}{dy}$ lo que nos entrega que

$$\mu\nabla^2\phi = 4\pi G\rho - \vec{\nabla}\mu\cdot\vec{\nabla}\phi$$

******J.D. Bekenstein, M. Milgrom, Astrophys. J. 286 (1984) 7.

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado

- Un método para obtener las versiones no relativista de las álgebras de Poincaré generalizadas y las álgebras AdS-Lorentz generalizadas que fueron bautizadas como álgebras de Galileo tipo I $\mathcal{G}\mathfrak{B}_n$ y tipo II $\mathcal{G}\mathfrak{L}_n$, las cuales al igual que sus versiones relativistas están relacionadas por un proceso de contracción
- Fue posible encontrar una generalización de la teoría de Newton a partir de la obtención del límite clásico de la gravedad de Einstein Chern Simons invariante bajo el álgebra $\mathfrak{B}_5$, obteniendo una corrección a la ecuación de Poisson.
- El mismo resultado fue obtenido gaugeando el álgebra $\mathcal{G}\mathfrak{B}_5$ obtenida a partir del álgebra de Newton–Hooke por el mecanismo de S-expansión.
- Este trabajo esta basado en la publicación "N. González, G. Rubio, P. Salgado, S. Salgado, *Generalized Galilean algebras and Newtonian Gravity*, Physics Letters B, Volume 755, p. 433-438".

Muchas Gracias.