$N = 1, D = 4$ Supergravity and Maxwell Superalgebra

P.K. Concha, E.K. Rodríguez

Evelyn Rodríguez

Universidad Adolfo Ibañez

Universidad Austral de Chile

Universidad del Bío-Bío
Cosmoconce 2016

Abril 2016

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos

Introducción

La simetría de Maxwell se introdujo hace unos 40 años, pero es sólo recientemente que ha atraído más atención por sus interesantes aplicaciones en gravedad (y supergravedad!).

Álgebra de Maxwell = Álgebra de Poincaré (J_{ab}, P_a) **deformada** y **extendida** por cargas tensoriales centrales $Z_{ab} \Leftarrow$ Abelianos

$$
\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad [P_a, P_b] = Z_{ab} \\
[Z_{ab}, P_c] &= 0 \quad [Z_{ab}, Z_{cd}] = 0 \quad \leftarrow \text{Abelianos} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} + \eta_{ad} Z_{bc} \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac} + \eta_{ad} J_{bc} \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b
\end{aligned}
$$

Introducción

$$\text{Contracción} \;:\; \mathfrak{so}(3,2)\oplus\mathfrak{so}(3,1) \longrightarrow \text{Álgebra de Maxwell } \mathcal{M}_4$$
$$\text{Expansión} \;:\; \mathfrak{so}(3,2) \longrightarrow \text{Álgebra de Maxwel } \mathcal{M}_4$$

Mediante el procedimiento de la **S-expansión** se generalizó este resultado a una familia de álgebras tipo Maxwell[1] :

$$S_E^{(2)} \;:\; \text{AdS} \longrightarrow \text{Álgebra de Maxwell } \mathcal{M}_4 = \{J_{ab}, P_a, Z_{ab}\}$$
$$\vdots$$
$$S_E^{(m-2)} \;:\; \text{AdS} \longrightarrow \text{Álgebras tipo Maxwell } \mathcal{M}_m = \left\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}^{(k)}, Z_a^{(l)}\right\}$$

[1] F. Izaurieta, P. Minning, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado. Phys. Lett. B 678, 2009

S-expansión

- La S-**expansión** se basa en la combinación de las constantes de estructura de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con la ley de multiplicación interior de un semigrupo S, para definir el paréntesis de Lie de una nueva álgebra S-expandida:

Álgebra S-expandida

$$\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$$

$$\left[\mathbf{T}_{(A,\alpha)}, \mathbf{T}_{(B,\beta)}\right] = C_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)}\mathbf{T}_{(C,\gamma)} \quad ; \quad \lambda_\alpha \lambda_\beta = K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\lambda_\gamma$$

donde $\mathbf{T}_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha \mathbf{T}_A$ y $C_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} C_{AB}{}^{C}$.

S-expansión

- Una ventaja de este método es que nos entrega un tensor invariante para el álgebra S-expandida:

Teorema

Sea S un semigrupo abeliano, $\mathfrak{g}$ una (super)álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, y sea $\langle T_{A_1} \ldots T_{A_n} \rangle$ un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. Entonces, la expresión

$$\left\langle T_{(A_1,\alpha_1)} \cdots T_{(A_n,\alpha_n)} \right\rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}^{\gamma} \left\langle T_{A_1} \cdots T_{A_n} \right\rangle$$

donde α_γ son constantes arbitrarias, corresponde a un tensor invariante para el álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$.

Extensión de la gravedad de Einstein

Acción de Lanczos-Lovelock

$$S_G = \int \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L^{(p)},$$

$$L^{(p)} = \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D}.$$

$$\Downarrow$$

$D = 2n-1$: Acción Chern-Simons (CS) invariante bajo AdS

$D = 2n$: Acción tipo Born-Infeld (BI) invariante sólo bajo rotaciones de Lor

Si las teorías de CS y BI son las teorías de gauge apropiadas para describir gravedad, entonces éstas deben estar relacionadas a Relatividad General.

Extensión de la gravedad de Einstein

- Recientemente se mostró que RG estándar en dimensiones impares se puede obtener desde una teoría de gravedad CS para las álgebras tipo Maxwell[2] :

$$L^{(2n-1)}_{\mathcal{M}\text{-CS}} \quad \xrightarrow{l \to 0} \quad L^{(2n-1)}_{EH}$$

- Análogamente, en dimensiones pares RG emerge como un cierto límite desde una teoría de gravedad tipo BI invariante bajo una subálgebra $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$ del álgebra tipo Maxwell[3] :

$$L^{(2n)}_{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}\text{-BI}} \quad \xrightarrow{l \to 0} \quad L^{(2n)}_{EH}$$

[2] F. Izaurieta, P. Minning, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado. Phys. Lett. B 678, 2009

[3] P. K. Concha, D.M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado. Phys. Lett. B 725, 2013

Superálgebra de Maxwell minimal

Extensión minimal: $Q_\alpha \to (Q_\alpha, \Sigma_\alpha)$

Superálgebra s$\mathcal{M}$

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} + \eta_{ad}J_{bc} \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \qquad [P_a, P_b] = Z_{ab} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac} + \eta_{ad}Z_{bc} \\
[P_a, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_a\Sigma\right)_\alpha \qquad [J_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}Q\right)_\alpha \\
[J_{ab}, \Sigma_\alpha] &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}\Sigma\right)_\alpha \\
\{Q_\alpha, \Sigma_\beta\} &= -\frac{1}{2}\left(\gamma^{ab}C\right)_{\alpha\beta} Z_{ab} \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left(\gamma^a C\right)_{\alpha\beta} P_a
\end{aligned}
$$

Superálgebra de Maxwell minimal

- Se mostró que[4]

$$S_E^{(4)}\colon \mathfrak{osp}(4|1) \longrightarrow s\mathcal{M}_4, \quad \cdots \quad , S_E^{(2m-4)}\colon \mathfrak{osp}(4|1) \longrightarrow s\mathcal{M}_m$$

$$\begin{aligned} s\mathcal{M}_m &= \left\{ J_{ab}, P_a, Z_{ab}^{(k)}, \tilde{Z}_{ab}^{(k)}, Z_a^{(l)}, \tilde{Z}_a^{(l)}, Q_\alpha, \Sigma_\alpha^{(k)}, \Phi_\alpha^{(l)} \right\} \\ \mathcal{M}_m &= \left\{ J_{ab}, P_a, Z_{ab}^{(k)}, Z_a^{(l)} \right\} \end{aligned}$$

- Esta familia de superálgebras de Maxwell puede ser vistas como una generalización de la superálgebra de D'Auria-Fré y las álgebras de Green.

[4] **P. K. Concha, E. K. Rodríguez,** ***Maxwell Superalgebras and Abelian Semigroup Expansion*****, Nucl. Phys. B 886 (2014) 1128**

- A continuación, se muestra la construcción explícita de la superálgebra $s\mathcal{M}_4$ mediante el mecanismo de la S-expansión y de una acción para supergravedad en $D = 4$ para dicha superálgebra.

- Sin embargo, veamos primero brevemente cómo obtener el álgebra de Maxwell $\mathcal{M}_4$ y la construcción de una acción en $D = 4$ para esta álgebra.

Tabla de contenidos

Introducción

- En dimensiones pares el Lagrangiano de LL puede ser escrito como un Lagrangiano tipo Born-Infeld invariante sólo bajo **rotaciones locales de Lorentz:**

$$L_{BI}^{(4)} = \frac{\kappa}{2n}\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{2n}} \bar{R}^{a_1 a_2} \ldots \bar{R}^{a_{2n-1} a_{2n}},$$

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b$$

Introducción

- En dimensiones pares el Lagrangiano de LL puede ser escrito como un Lagrangiano tipo Born-Infeld invariante sólo bajo **rotaciones locales de Lorentz:**

$$L_{BI}^{(4)} = \frac{\kappa}{2n}\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{2n}} \bar{R}^{a_1 a_2} \ldots \bar{R}^{a_{2n-1} a_{2n}},$$

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b$$

- Análogamente a lo que sucede en dimensiones impares, no existe un límite que nos permita desembocar en el Lagrangiano de Einstein-Hilbert (EH).

Introducción

- Sin embargo, es posible construir Lagrangianos tipo BI invariantes bajo subálgebras de las álgebras tipo Maxwell, los cuales tienen la propiedad de desembocar en RG en un cierto límite.

Introducción

- Sin embargo, es posible construir Lagrangianos tipo BI invariantes bajo subálgebras de las álgebras tipo Maxwell, los cuales tienen la propiedad de desembocar en RG en un cierto límite.

- Consideremos por simplicidad el caso $D = 4$. El álgebra de Maxwell $\mathcal{M}_4$ se puede obtener mediante una S-expansión del álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$.

Álgebra de Maxwell

$$\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$$

Álgebra AdS

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}\right] &= \eta_{bc}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ac}\tilde{J}_{bd} - \eta_{bd}\tilde{J}_{ac} + \eta_{ad}\tilde{J}_{bc}, \\
\left[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_{c}\right] &= \eta_{bc}\tilde{P}_{a} - \eta_{ac}\tilde{P}_{b}, \\
\left[\tilde{P}_{a}, \tilde{P}_{b}\right] &= \tilde{J}_{ab},
\end{aligned}$$

Semigrupo

$$S = S_E^{(2)} = \{\lambda_0, ..., \lambda_3\}, \quad \lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{cuando } \alpha+\beta \leq 3, \\ \lambda_3, & \text{cuando } \alpha+\beta > 3. \end{cases}$$

Álgebra de Maxwell

λ_3	$\tilde{J}_{ab,3}$	$\tilde{P}_{a,3}$
λ_2	$\tilde{J}_{ab,2}$	
λ_1		$\tilde{P}_{a,1}$
λ_0	$\tilde{J}_{ab,0}$	
	V_0	V_1

λ_3		
λ_2	$\tilde{J}_{ab,2}$	
λ_1		$\tilde{P}_{a,1}$
λ_0	$\tilde{J}_{ab,0}$	
	V_0	V_1

El álgebra S-expandida resonante 0_s-reducida es generada por:

$$J_{ab}=\lambda_0\tilde{J}_{ab},\quad P_a=\lambda_2\tilde{P}_a,\quad Z_{ab}=\lambda_2\tilde{J}_{ab}.$$

Álgebra de Maxwell

$\mathcal{M}_4$

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac} + \eta_{ad} J_{bc} \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \\
[P_a, P_b] &= Z_{ab} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} + \eta_{ad} Z_{bc} \\
[Z_{ab}, P_c] &= 0 \qquad [Z_{ab}, Z_{cd}] = 0
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{L}^{\mathcal{M}_4}$

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac} + \eta_{ad} J_{bc} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} + \eta_{ad} Z_{bc} \\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0
\end{aligned}
$$

EH desde gravedad BI

- El lagrangiano BI en $D=4$ es dado por

$$L_{\mathrm{BI}}^{(4)}=\langle FF\rangle=\frac{\kappa}{4}\varepsilon_{abcd}\left(\frac{1}{l^4}e^a e^b e^c e^d+\frac{2}{l^2}R^{ab}e^c e^d+R^{ab}R^{cd}\right)$$

el cual se puede construir a partir de la 2-forma curvatura AdS

$$F=\frac{1}{2}\left(R^{ab}+\frac{1}{l^2}e^a e^b\right)\tilde{J}_{ab}+\frac{1}{l}T^a\tilde{P}_a$$

y el único tensor invariante no nulo

$$\left\langle\tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\right\rangle_{Lorentz}=\varepsilon_{abcd}$$

EH desde gravedad BI

- De este modo el lagrangiano tipo BI expandido se construye con la 2-forma curvatura de Maxwell:

$$F = \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\left(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right)Z_{ab} + \frac{1}{l}T^a P_a$$

y las componentes no nulas del tensor invariante:

$$\begin{aligned} \langle J_{ab}J_{cd}\rangle_{\mathfrak{M}_4} &= \alpha_0 l^2 \langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle_{Lorentz} = \alpha_0 l^2 \varepsilon_{abcd} \\ \langle J_{ab}Z_{cd}\rangle_{\mathfrak{M}_4} &= \alpha_2 l^2 \langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle_{Lorentz} = \alpha_2 l^2 \varepsilon_{abcd} \end{aligned}$$

EH desde gravedad BI

- De este modo el lagrangiano tipo BI expandido se construye con la 2-forma curvatura de Maxwell:

$$F=\frac{1}{2}R^{ab}J_{ab}+\frac{1}{2}\left(D_{\omega}k^{ab}+\frac{1}{l^{2}}e^{a}e^{b}\right)Z_{ab}+\frac{1}{l}T^{a}P_{a}$$

y las componentes no nulas del tensor invariante:

$$\begin{aligned}\left\langle J_{ab}J_{cd}\right\rangle_{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}_4}} &= \alpha_0 l^2\left\langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\right\rangle_{Lorentz}=\alpha_0 l^2\varepsilon_{abcd}\\ \left\langle J_{ab}Z_{cd}\right\rangle_{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}_4}} &= \alpha_2 l^2\left\langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\right\rangle_{Lorentz}=\alpha_2 l^2\varepsilon_{abcd}\end{aligned}$$

$$L_{\mathrm{BI}\,(4)}^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}_4}}=\frac{\alpha_0}{4}\epsilon_{abcd}l^2R^{ab}R^{cd}+\frac{\alpha_2}{2}\epsilon_{abcd}\left(R^{ab}e^{c}e^{d}+l^2D_{\omega}k^{ab}R^{cd}\right)$$

Gravedad de Einstein-Born-Infeld

- Si consideramos la variación del lagrangiano módulo término de borde, tenemos que

$$\delta L_{\text{BI (4)}}^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}4}} = \epsilon_{abcd}\left(\alpha_2 R^{ab} e^c\right)\delta e^d + \epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\left(\alpha_2 T^c e^d\right)$$

Gravedad de Einstein-Born-Infeld

- Si consideramos la variación del lagrangiano módulo término de borde, tenemos que

$$\delta L_{\mathrm{BI}\ (4)}^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}4}} = \epsilon_{abcd} \left(\alpha_2 R^{ab} e^c\right) \delta e^d + \epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} \left(\alpha_2 T^c e^d\right)$$

- Así, $\delta L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}_4}} = 0$ conduce a la dinámica de RG en el vacío.

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c &= 0 \\ \epsilon_{abcd} T^c e^d &= 0 \end{aligned}$$

Gravedad de Einstein-Born-Infeld

- Este argumento no es sólo un accidente 4-dimensional

$$L^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}}_{\mathrm{BI}\;(2n)} = \sum_{k=1}^{n} l^{2k-2}\frac{1}{2n}\binom{n}{k}\alpha_j \delta^{j}_{i_1+\cdots+i_n}\delta^{i_{k+1}}_{p_1+q_1}\cdots\delta^{i_n}_{p_{n-k}+q_{n-k}}$$
$$\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}}R^{(a_1a_2,i_1)}\ldots R^{(a_{2k-1}a_{2k},i_k)}e^{(a_{2k+1},p_1)}$$
$$e^{(a_{2k+2},q_1)}\ldots e^{(a_{2n-1},p_{n-k})}e^{(a_{2n},q_{n-k})}$$

P. K. Concha, D.M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, ***Even dimensional General Relativity from Born-Infeld Gravity*****, Phys. Lett. B 725, 419 (2013).**

Gravedad de Einstein-Born-Infeld

- Este argumento no es sólo un accidente 4-dimensional

$$L_{\mathrm{BI}\ (2n)}^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}} = \sum_{k=1}^{n} l^{2k-2} \frac{1}{2n} \binom{n}{k} \alpha_j \delta^{j}_{i_1+\cdots+i_n} \delta^{i_{k+1}}_{p_1+q_1} \cdots \delta^{i_n}_{p_{n-k}+q_{n-k}}$$
$$\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1 a_2, i_1)} \ldots R^{(a_{2k-1} a_{2k}, i_k)} e^{(a_{2k+1}, p_1)}$$
$$e^{(a_{2k+2}, q_1)} \ldots e^{(a_{2n-1}, p_{n-k})} e^{(a_{2n}, q_{n-k})}$$

- En el límite $l = 0$, el único término no nulo es proporcional al lagrangiano de EH en $D = 2n$,

$$L_{\mathrm{BI}\ (2n)}^{\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}} \Big|_{l=0} = \frac{1}{2} \alpha_{2n-2} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{a_1 a_2} e^{a_3} \cdots e^{a_{2n}}$$

P. K. Concha, D.M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, ***Even dimensional General Relativity from Born-Infeld Gravity*****, Phys. Lett. B 725, 419 (2013).**

Tabla de contenidos

Superálgebra de Maxwell

Como se mencionó anteriormente, la superálgebra de Maxwell minimal se puede obtener alternativamente como una S-expansión desde la superalgebra $\mathfrak{osp}(4|1)$,

$\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(4|1)$

$$
\begin{aligned}
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \eta_{bc}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ac}\tilde{J}_{bd} - \eta_{bd}\tilde{J}_{ac} + \eta_{ad}\tilde{J}_{bc}, \\
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_{c}] &= \eta_{bc}\tilde{P}_{a} - \eta_{ac}\tilde{P}_{b}, \quad [\tilde{P}_{a}, \tilde{P}_{b}] = \tilde{J}_{ab}, \\
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{Q}_{\alpha}] &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}\tilde{Q}\right)_{\alpha}, \qquad [\tilde{P}_{a}, \tilde{Q}_{\alpha}] = -\frac{1}{2}\left(\gamma_{a}\tilde{Q}\right)_{\alpha}, \\
\{\tilde{Q}_{\alpha}, \tilde{Q}_{\beta}\} &= -\frac{1}{2}\left[\left(\gamma^{ab}C\right)_{\alpha\beta}\tilde{J}_{ab} - 2\left(\gamma^{a}C\right)_{\alpha\beta}\tilde{P}_{a}\right],
\end{aligned}
$$

usando el siguiente semigrupo abeliano:

$$
S = S_E^{(4)} = \{\lambda_0, ..., \lambda_5\}, \quad \lambda_\alpha\lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{cuando } \alpha+\beta \leq 5, \\ \lambda_5, & \text{cuando } \alpha+\beta > 5. \end{cases}
$$

Superálgebra de Maxwell

El proceso de S-expansión se puede ver explícitamente en el siguiente diagrama :

λ_5	$\tilde{J}_{ab,5}$	$\tilde{Q}_{\alpha,5}$	$\tilde{P}_{a,5}$
λ_4	$\tilde{J}_{ab,4}$		$\tilde{P}_{a,4}$
λ_3		$\tilde{Q}_{\alpha,3}$	
λ_2	$\tilde{J}_{ab,2}$		$\tilde{P}_{a,2}$
λ_1		$\tilde{Q}_{\alpha,1}$	
λ_0	$\tilde{J}_{ab,0}$		
	V_0	V_1	V_2

λ_5			
λ_4	$\tilde{J}_{ab,4}$		$\tilde{P}_{a,4}$
λ_3		$\tilde{Q}_{\alpha,3}$	
λ_2	$\tilde{J}_{ab,2}$		$\tilde{P}_{a,2}$
λ_1		$\tilde{Q}_{\alpha,1}$	
λ_0	$\tilde{J}_{ab,0}$		
	V_0	V_1	V_2

Superálgebra de Maxwell

- La nueva superálgebra es generada por $\{J_{ab}, P_a, \tilde{Z}_{ab}, Z_{ab}, \tilde{Z}_a, Q_\alpha, \Sigma_\alpha\}$, donde estos nuevos generadores se pueden escribir en términos de los generadores originales de AdS como:

$$
\begin{array}{lll}
J_{ab} = \lambda_0 \tilde{J}_{ab}, & \tilde{Z}_{ab} = \lambda_2 \tilde{J}_{ab}, & Z_{ab} = \lambda_4 \tilde{J}_{ab}, \\
P_a = \lambda_2 \tilde{P}_a, & \tilde{Z}_a = \lambda_4 \tilde{P}_a, & \\
Q_\alpha = \lambda_1 \tilde{Q}_\alpha, & \Sigma_\alpha = \lambda_3 \tilde{Q}_\alpha. &
\end{array}
$$

s$\mathcal{M}_4$ superalgebra

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} + \eta_{ad}J_{bc} \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \qquad [P_a, P_b] = Z_{ab} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac} + \eta_{ad}Z_{bc} \\
\left[J_{ab}, \tilde{Z}_{ab}\right] &= \eta_{bc}\tilde{Z}_{ad} - \eta_{ac}\tilde{Z}_{bd} - \eta_{bd}\tilde{Z}_{ac} + \eta_{ad}\tilde{Z}_{bc} \\
\left[\tilde{Z}_{ab}, \tilde{Z}_{cd}\right] &= \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac} + \eta_{ad}Z_{bc} \\
\left[J_{ab}, \tilde{Z}_c\right] &= \eta_{bc}\tilde{Z}_a - \eta_{ac}\tilde{Z}_b \qquad \left[\tilde{Z}_{ab}, P_c\right] = \eta_{bc}\tilde{Z}_a - \eta_{ac}\tilde{Z}_b \\
[P_a, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_a\Sigma\right)_\alpha \qquad [J_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}Q\right)_\alpha \\
[J_{ab}, \Sigma_\alpha] &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}\Sigma\right)_\alpha \qquad \left[\tilde{Z}_{ab}, Q_\alpha\right] = -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ab}\Sigma\right)_\alpha \\
\{Q_\alpha, \Sigma_\beta\} &= \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma^{ab}C\right)_{\alpha\beta} Z_{ab} - 2\left(\Gamma^a C\right)_{\alpha\beta}\tilde{Z}_a\right] \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -\frac{1}{2}\left[\left(\gamma^{ab}C\right)_{\alpha\beta}\tilde{Z}_{ab} - 2\left(\gamma^a C\right)_{\alpha\beta}P_a\right]
\end{aligned}
$$

P. K. Concha, E. K. Rodríguez, ***Maxwell Superalgebras and Abelian Semigroup Expansion,*** **Nucl. Phys. B 886 (2014)**

Superálgebra de Maxwell

- La superálgebra obtenida después de una S-expansion resonante 0_s-reducida desde $\mathfrak{osp}\left(4|1\right)$ corresponde a la superálgebra minimal tipo Maxwell $s\mathcal{M}_4$ en $D=4$ dimensiones.

- Notemos que cuando $\tilde{Z}_{ab}=\tilde{Z}_a=0$ se obtiene la superálgebra de Maxwell minimal $s\mathcal{M}=\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}, Q_\alpha, \Sigma_\alpha\}$.

$D=4$

$$S_E^{(2)} \quad : \quad \mathfrak{so}\left(3,2\right) \longrightarrow \text{Álgebra de Maxwell } \mathcal{M}_4$$

$$S_E^{(4)} \quad : \quad \mathfrak{osp}\left(4|1\right) \longrightarrow \text{Superálgebra de Maxwell } s\mathcal{M}_4$$

Acción de MacDowell Mansouri (MM)

Una formulación geométrica de Supergravedad fue presentada por S.W. MacDowell and F. Mansouri para la superálgebra $\mathfrak{osp}\left(4|1\right)$:

$$S_{MM} = 2\int \langle F \wedge F \rangle = 2\int F^A \wedge F^B \langle T_A T_B \rangle$$

$$\langle T_A T_B \rangle = \begin{cases} \left\langle \tilde{J}_{ab} \tilde{J}_{cd} \right\rangle = \epsilon_{abcd} \\ \left\langle \tilde{Q}_\alpha \tilde{Q}_\beta \right\rangle = 2\left(\gamma_5\right)_{\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S_{MM} = 2\int \frac{1}{4}\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}^{cd}\epsilon_{abcd} + \frac{2}{l}\bar{\rho}\gamma_5\rho$$

Acción de MacDowell Mansouri (MM)

Acción de MacDowell-Mansouri

$$S_{MM} = \int \frac{1}{l^2}\epsilon_{abcd}\left(R^{ab}e^c e^d + 4\bar{\psi}e^a\gamma_a\gamma_5 D\psi\right) + \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\left(\frac{1}{l^4}e^a e^b e^c e^d + \frac{1}{l^2}\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi e^c e^d\right)$$

Esta acción describe supergravedad AdS $N=1, D=4$, donde el último término corresponde al término cosmológico supersimétrico.

Acción de Supergravedad à la MM

$$S_E^{(4)}:\mathfrak{osp}(4|1) \longrightarrow \text{Superálgebra de Maxwell minimal } s\mathcal{M}_4$$

- Hemos construído una acción à la MM con la 2-forma curvatura expandida y el correspondiente tensor invariante expandido[5]:

$$S = 2\int \langle F \wedge F \rangle_{s\mathcal{M}_4} = 2\int F^A \wedge F^B \langle T_A T_B \rangle_{s\mathcal{M}_4}$$

[5] **P. K. Concha, E. K. Rodríguez,** ***N=1 supergravity and Maxwell superalgebras*****, JHEP 1409 (2014) 090**

Acción de Supergravedad à la MM

- Las componentes no-nulas del tensor invariante expandido son:

Tensor invariante

$$\langle J_{ab}J_{cd}\rangle_{s\mathcal{M}_4} = \alpha_0 \langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle \qquad \langle J_{ab}Z_{cd}\rangle_{s\mathcal{M}_4} = \alpha_4 \langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle$$
$$\langle J_{ab}\tilde{Z}_{cd}\rangle_{s\mathcal{M}_4} = \alpha_2 \langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle \qquad \langle \tilde{Z}_{ab}\tilde{Z}_{cd}\rangle_{s\mathcal{M}_4} = \alpha_4 \langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle$$
$$\langle Q_\alpha Q_\beta\rangle_{s\mathcal{M}_4} = \alpha_2 \langle \tilde{Q}_\alpha\tilde{Q}_\beta\rangle \qquad \langle Q_\alpha \Sigma_\beta\rangle_{s\mathcal{M}_4} = \alpha_4 \langle \tilde{Q}_\alpha\tilde{Q}_\beta\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{J}_{ab}\tilde{J}_{cd}\rangle &= \epsilon_{abcd}\\ \langle \tilde{Q}_\alpha\tilde{Q}_\beta\rangle &= 2\left(\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Acción de Supergravedad à la MM

1-forma conexión

$$
\begin{aligned}
A \quad = \quad & \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{k}^{ab}\tilde{Z}_{ab} + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}e^{a}P_{a} \\
& + \frac{1}{l}\tilde{h}^{a}\tilde{Z}_{a} + \frac{1}{\sqrt{l}}\psi^{\alpha}Q_{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{l}}\xi^{\alpha}\Sigma_{\alpha}
\end{aligned}
$$

2-forma curvatura

$$
\begin{aligned}
F \quad = \quad & \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{F}^{ab}\tilde{Z}_{ab} + \frac{1}{2}F^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}R^{a}P_{a} + \\
& \frac{1}{l}\tilde{H}^{a}\tilde{Z}_{a} + \frac{1}{\sqrt{l}}\Psi^{\alpha}Q_{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{l}}\Xi^{\alpha}\Sigma_{\alpha}
\end{aligned}
$$

Acción de Supergravedad à la MM

$$
\begin{aligned}
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\omega^{cb}, \\
R^{a} &= de^{a} + \omega^{a}{}_{b}e^{b} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{a}\psi, \\
\tilde{F}^{ab} &= d\tilde{k}^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\tilde{k}^{cb} - \omega^{b}{}_{c}\tilde{k}^{ca} + \frac{1}{2l}\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi, \\
F^{ab} &= dk^{ab} + \omega^{a}{}_{c}k^{cb} - \omega^{b}{}_{c}k^{ca} + \tilde{k}^{a}{}_{c}\tilde{k}^{cb} + \frac{1}{l^{2}}e^{a}e^{b} + \frac{1}{l}\bar{\xi}\gamma^{ab}\psi, \\
\tilde{H}^{a} &= d\tilde{h}^{a} + \omega^{a}{}_{b}\tilde{h}^{b} + \tilde{k}^{a}{}_{c}e^{c} - \bar{\xi}\Gamma^{a}\psi, \\
\Psi &= d\psi + \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^{ab}\psi = D\psi, \\
\Xi &= D\xi + \frac{1}{4}\tilde{k}_{ab}\gamma^{ab}\psi + \frac{1}{2l}e^{a}\gamma_{a}\psi.
\end{aligned}
$$

Acción de Supergravedad à la MM

- Considerando las diferentes componentes no nulas del tensor invariante y la 2-forma curvatura, encontramos que la acción se puede escribir como

$$S = 2\int \left(\frac{1}{4}\alpha_0\epsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd} + \frac{1}{2}\alpha_2\epsilon_{abcd}R^{ab}\tilde{F}^{cd} + \frac{1}{2}\alpha_4\epsilon_{abcd}R^{ab}F^{cd} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\alpha_4\epsilon_{abcd}\tilde{F}^{ab}\tilde{F}^{cd} + \frac{2}{l}\alpha_2\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + \frac{4}{l}\alpha_4\bar{\Psi}\gamma_5\Xi\right)$$

Acción de Supergravedad à la MM

Así, la acción geométrica tipo MacDowell-Mansouri para la superálgebra $s\mathcal{M}_4$ es

$$
\begin{aligned}
S = \int \frac{\alpha_0}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd} + \alpha_2 d\left(\epsilon_{abcd}R^{ab}\tilde{k}^{cd} + \frac{4}{l}D\bar{\psi}\gamma_5\psi\right) \\
+ \alpha_4\left[\frac{1}{l^2}\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d + \frac{4}{l^2}\bar{\psi}e^a\gamma_a\gamma_5 D\psi\right. \\
\left. + d\left(\epsilon_{abcd}\left(R^{ab}k^{cd} + \frac{1}{2}D\tilde{k}^{ab}\tilde{k}^{cd}\right) + \frac{8}{l}\bar{\tilde{\xi}}\gamma_5 D\psi + \frac{1}{l}\bar{\psi}\tilde{k}^{ab}\gamma_{ab}\gamma_5\psi\right)\right]
\end{aligned}
$$

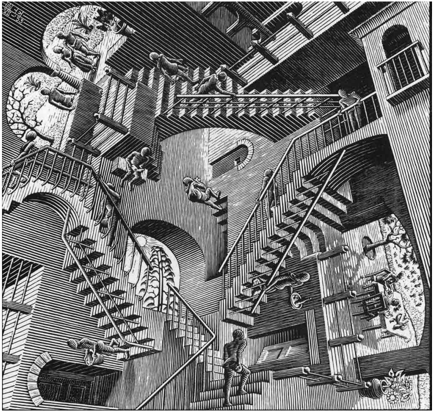
$\Rightarrow s\mathcal{M}_4$ conduce a la acción de **Supergravedad pura** más términos de borde.

Conclusiones

- Se mostró que en dimensiones pares Relatividad General emerge como un cierto límite desde una teoría de gravedad tipo BI invariante bajo una subálgebra $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$ del álgebra tipo Maxwell.
- Mediante el mecanismo de S-expansión se derivó una familia de superálgebras de Maxwell $s\mathcal{M}_m$, las que contienen a las álgebras tipo Maxwell $\mathcal{M}_m$ como subálgebras.
- Se obtuvo supergravedad pura $N=1$ en $D=4$ como una acción tipo MacDowell Mansouri, la cual se construye exclusivamente en términos de la 2-forma curvatura $s\mathcal{M}_4$.

Conclusiones

- A pesar de que los campos extra aparecen sólo en los términos de borde, y por lo tanto no contribuyen a la dinámica, sería interesante estudiar la consecuencia de estos términos en el contexto de la correspondencia AdS/CFT.
- Siguiendo un approach similar al considerado aquí se podría considerar la construcción de supergravedades N-extendidas en diferentes dimensiones, haciendo uso de las superálgebras de Maxwell N-extendidas.



¡Gracias!