

# Pure Lovelock gravity and Chern-Simons theory

P.K. Concha, R. Durka, C. Inostroza, N. Merino, E.K. Rodríguez

Patrick Concha

Universidad Adolfo Ibañez  
Universidad Austral de Chile

Universidad del Bío-Bío  
Cosmoconce 2016

Abril 2016

# Table of Contents

- 1 **Introducción**
  - Gravedad de Lanczos-Lovelock
  - Gravedad Pure Lovelock
- 2 **Algebras  $\mathfrak{C}_m$  y  $S$ -expansión**
  - ¿Porqué las álgebras  $\mathfrak{C}_m$ ?
  - Álgebras  $\mathfrak{C}_m$  y  $S$ -expansión
- 3 **Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock**
  - Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock en  $D = 5$
  - Generalización a dimensiones mayores
- 4 **Conclusión**

# Table of Contents

- 1 **Introducción**
  - Gravedad de Lanczos-Lovelock
  - Gravedad Pure Lovelock
- 2 Algebras  $\mathfrak{E}_m$  y  $S$ -expansión
  - ¿Porqué las álgebras  $\mathfrak{E}_m$ ?
  - Álgebras  $\mathfrak{E}_m$  y  $S$ -expansión
- 3 Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock
  - Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock en  $D = 5$
  - Generalización a dimensiones mayores
- 4 Conclusión

# Gravedad de Lanczos-Lovelock

El Lagrangiano más general para gravedad en  $D$  dimensiones construido sobre los mismo principios que Relatividad General es dado por el Lagrangiano de **Lanczos-Lovelock (LL)**

$$S = \int \sum_{p=0}^{[D/2]} \tilde{\alpha}_p \mathcal{L}^{(p)},$$

$$\mathcal{L}^{(p)} = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D}$$

donde  $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}$  es la 2-forma curvatura de Riemann.

# Gravedad de Lanczos-Lovelock

## Construcción

La  $D$ -forma más general que satisface las siguientes condiciones:

- $\mathcal{L}$  debe ser Invariante bajo transformaciones locales de Lorentz.

# Gravedad de Lanczos-Lovelock

## Construcción

La  $D$ -forma más general que satisface las siguientes condiciones:

- $\mathcal{L}$  debe ser Invariante bajo transformaciones locales de Lorentz.
- $\mathcal{L}$  es construido a partir de  $e^a$ ,  $\omega^{ab}$ , sus derivadas exteriores y productos de ellos.

# Gravedad de Lanczos-Lovelock

Una elección especial de los coeficientes  $\tilde{\alpha}_p$ 's puede hacerse en dimensiones impares:

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{(-\text{sgn}(\Lambda))^p}{(D-2p)} \ell^{D-2p} \binom{\frac{D-1}{2}}{p} k, \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha}_0 = \frac{1}{D} \ell^D k$$

Con estos coeficientes, el Lagrangiano  $LL$  es una  $D$ -forma Chern-Simons (CS)

## Lagrangiano CS en $D=2n+1$

$$\mathcal{L}_{CS} = k \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}} \sum_{p=0}^n \frac{\ell^{2(p-n)-1}}{2(n-p)+1} \binom{n}{p} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n+1}}$$

# Gravedad Pure Lovelock

Una nueva forma de fijar las constantes conduce a un caso particular de la gravedad de  $LL$  conocido como teoría **Pure Lovelock (PL)** de la gravedad

$$S = \int (\alpha_0 \mathcal{L}_0 + \alpha_p \mathcal{L}_p),$$

$$\mathcal{L}_0 = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_D},$$

$$\mathcal{L}_p = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D}.$$

$$\alpha_0 = -\frac{2\Lambda\kappa}{D!} = -\frac{(\mp 1)^p \kappa}{D(D-2p-1)! \ell^{2p}}$$

$$\alpha_p = \frac{\kappa}{(D-2p)!}$$

R.G. Cai, N. Ohta, *Phys. Rev. D* 74 (2006)

N. Dadhich, J.M. Pons, K. Prabhu, *Gen. Rel. Grav.* 45 1131 (2013) 

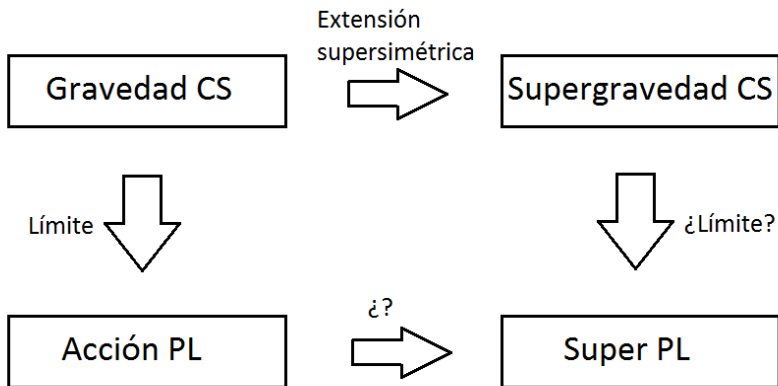
# Gravedad Pure Lovelock

La versión supersimétrica de la teoría de **Lovelock** es desconocida.

La Tarea no es trivial debido a la falta de claridad en que términos deben ser considerados para asegurar la invariancia bajo transformaciones supersimétricas.

$$\mathcal{L}^{\text{superPL}} = ?$$

No obstante, si se pudiese obtener la **acción PL** como un límite de una teoría **CS** para una simetría especial, esto podría ser generalizado para encontrar el **super PL**.



# Table of Contents

- 1 Introducción
  - Gravedad de Lanczos-Lovelock
  - Gravedad Pure Lovelock
- 2 Algebras  $\mathfrak{C}_m$  y  $S$ -expansión
  - ¿Porqué las álgebras  $\mathfrak{C}_m$ ?
  - Álgebras  $\mathfrak{C}_m$  y  $S$ -expansión
- 3 Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock
  - Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock en  $D = 5$
  - Generalización a dimensiones mayores
- 4 Conclusión

## ¿Porqué las álgebras $\mathfrak{C}_m$ ?

Nuestro objetivo requiere encontrar la simetría bajo la cual el **término cosmológico** y el **término deseado de Lovelock** terminen en un sector del tensor invariante mientras que los términos no deseados, en otro sector.

$$S = \int \alpha (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_p) + \beta \mathcal{L}_{q \neq p \neq 0}$$

Las simetrías que ofrecen dicha propiedad se originan del álgebra  $\mathfrak{so}(D-1, 2) \oplus \mathfrak{so}(D-1, 1)$ , la cual además de tener a  $\{J_{ab}, P_a\}$  contiene a un nuevo generador no abeliano  $Z_{ab}$ .

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}$$

El método de  $S$ -expansión permite generalizar dicha álgebra a una familia de álgebras tipo Maxwell que denotaremos  $\mathfrak{C}_m$  (conocidas también como  $AdS\text{-}\mathcal{L}_m$ ).

# Álgebras $\mathfrak{C}_m$ y $S$ -expansión

El método de  $S$ -expansión consiste en combinar las constantes de estructura de un(a) (super)álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  con la ley de multiplicación de un semigrupo  $S$  conduciendo a una nueva (super)álgebra de Lie  $\mathfrak{G}$ .

## Definición

Sea  $S = \{\lambda_\alpha\}$  un semigrupo abeliano y  $\mathfrak{g}$  un(a) (super)álgebra de Lie. El álgebra de Lie  $\mathfrak{G}$  definido por  $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$  es llamado (super)álgebra  $S$ -expandida de  $\mathfrak{g}$ .

$$\left[ T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)} \right] = K_{\alpha\beta}{}^\rho C_{AB}{}^C T_{(C,\rho)}$$

donde  $T_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha T_A$ .

# Álgebras $\mathfrak{C}_m$ y $S$ -expansión

Antes de aplicar el procedimiento de  $S$ -expansión para encontrar las álgebras  $\mathfrak{C}_m$  desde  $AdS$  es necesario primero descomponer el álgebra original  $\mathfrak{g}$  en subespacios,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(D-1, 2) = \mathfrak{so}(D-1, 1) \oplus \frac{\mathfrak{so}(D-1, 2)}{\mathfrak{so}(D-1, 1)} = V_0 \oplus V_1$$

## Álgebra $AdS$

$$\begin{aligned} [\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \eta_{bc}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ac}\tilde{J}_{bd} - \eta_{bd}\tilde{J}_{ac} + \eta_{ad}\tilde{J}_{bc}, \\ [\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c] &= \eta_{bc}\tilde{P}_a - \eta_{ac}\tilde{P}_b, \quad [\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] = \tilde{J}_{ab}, \end{aligned}$$

$$[V_0, V_0] \subset V_0, \quad [V_0, V_1] \subset V_1, \quad [V_1, V_1] \subset V_0$$

# Álgebras $\mathfrak{C}_m$ y $S$ -expansión

Consideremos  $S_M^{(3)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{si } \alpha + \beta \leq 3, \\ \lambda_{\alpha+\beta-4}, & \text{si } \alpha + \beta > 3, \end{cases}$$

y sea la descomposición en subconjuntos  $S_M^{(3)} = S_0 \cup S_1$ , donde  $S_0 = \{\lambda_0, \lambda_2\}$  y  $S_1 = \{\lambda_1, \lambda_3\}$  tal que

$$S_0 \cdot S_0 \subset S_0, \quad S_0 \cdot S_1 \subset S_1, \quad S_1 \cdot S_1 \subset S_0$$

Decimos que  $\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1$  es una subálgebra resonante de  $S_M^{(3)} \times \mathfrak{g}$

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_2\} \times \{\tilde{J}_{ab}\} = \{\lambda_0 \tilde{J}_{ab}, \lambda_2 \tilde{J}_{ab}\},$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\lambda_1, \lambda_3\} \times \{\tilde{P}_a\} = \{\lambda_1 \tilde{P}_a, \lambda_3 \tilde{P}_a\}.$$

# Álgebras $\mathfrak{C}_m$ y $S$ -expansión

La nueva álgebra obtenida mediante  $S$ -expansión corresponde al álgebra  $\mathfrak{C}_5$  y es generada por el conjunto  $\{J_{ab}, Z_{ab}, P_a, R_a\}$

## $S_M^3$ -expansión resonante

$\lambda_3$		$R_a$
$\lambda_2$	$Z_{ab}$	
$\lambda_1$		$P_a$
$\lambda_0$	$J_{ab}$	
	$\tilde{J}_{ab}$	$\tilde{P}_a$

# Álgebras $\mathfrak{C}_m$ y S-expansión

## Álgebra $\mathfrak{C}_5$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}, \quad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b,$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bd}J_{ac},$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{bd}Z_{ac},$$

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bd}J_{ac},$$

$$[R_a, R_b] = Z_{ab}, \quad [Z_{ab}, P_c] = \eta_{bc}R_a - \eta_{ac}R_b,$$

$$[R_a, P_b] = J_{ab}, \quad [J_{ab}, R_c] = \eta_{bc}R_a - \eta_{ac}R_b,$$

$$[Z_{ab}, R_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b.$$

# Álgebras $\mathfrak{C}_m$ y $S$ -expansión

El álgebra  $\mathfrak{C}_m$  es obtenida usando  $S_M^{(m-2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}\}$  como semigrupo

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{si } \alpha + \beta \leq m - 2, \\ \lambda_{\alpha+\beta-(m-1)}, & \text{si } \alpha + \beta > m - 2, \end{cases}$$

y con la siguiente decomposición resonante  $S_M^{(m-2)} = S_0 \cup S_1$

$$S_0 = \{\lambda_{2i}\}, \quad \text{with } i = 0, \dots, \frac{m-3}{2},$$

$$S_1 = \{\lambda_{2i+1}\}, \quad \text{with } i = 0, \dots, \frac{m-3}{2}.$$

La nueva álgebra obtenida es generada por el conjunto  $\{J_{ab,(i)}, P_{a,(i)}\}$  cuyos generadores están relacionados a los de  $\mathfrak{so}(D-1, 2)$  a través de

$$\begin{aligned} J_{ab,(i)} &= \lambda_{2i} \tilde{J}_{ab} \\ P_{a,(i)} &= \lambda_{2i+1} \tilde{P}_a. \end{aligned}$$

# Álgebra $\mathfrak{C}_m$ y S-expansión

## Álgebra $\mathfrak{C}_m$

$$\begin{aligned} [J_{ab,(i)}, J_{cd,(j)}] &= \eta_{bc} J_{ad,(i+j) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)} - \eta_{ac} J_{bd,(i+j) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)} \\ &\quad + \eta_{ad} J_{bc,(i+j) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)} - \eta_{bd} J_{ac,(i+j) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)}, \\ [J_{ab,(i)}, P_{a,(j)}] &= \eta_{bc} P_{a,(i+j) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)} - \eta_{ac} P_{b,(i+j) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)}, \\ [P_{a,(i)}, P_{b,(j)}] &= J_{ab,(i+j+1) \bmod \left(\frac{m-1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de un tensor invariante en  $D = 2n + 1$  para el álgebra  $\mathfrak{C}_m$  vienen dadas por

$$\left\langle J_{a_1 a_2, (i_1)} \cdots J_{a_{2n-1} a_{2n}, (i_n)} P_{a_{2n+1}, (i_{n+1})} \right\rangle = \frac{2^n}{n+1} \sigma_{2i+1} \delta_j^i(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}},$$

donde las constantes  $\sigma$ 's son arbitrarias y donde

$$j(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) = (i_1 + i_2 + \cdots + i_{n+1}) \bmod \left( \frac{m-1}{2} \right)$$

# Table of Contents

- 1 **Introducción**
  - Gravedad de Lanczos-Lovelock
  - Gravedad Pure Lovelock
- 2 **Algebras  $\mathfrak{E}_m$  y  $S$ -expansión**
  - ¿Porqué las álgebras  $\mathfrak{E}_m$ ?
  - Álgebras  $\mathfrak{E}_m$  y  $S$ -expansión
- 3 **Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock**
  - Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock en  $D = 5$
  - Generalización a dimensiones mayores
- 4 **Conclusión**



# Gravedad CS y acción PL en $D = 5$

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{\ell}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{\ell}h^a R_a$$

Usando las propiedades de la  $S$ -expansión, es posible mostrar que

$$\begin{aligned} \langle J_{ab}J_{cd}P_e \rangle &= \frac{4}{3}\sigma_1\epsilon_{abcde}, & \langle J_{ab}J_{cd}Z_e \rangle &= \frac{4}{3}\sigma_3\epsilon_{abcde}, \\ \langle J_{ab}Z_{cd}Z_e \rangle &= \frac{4}{3}\sigma_1\epsilon_{abcde}, & \langle J_{ab}Z_{cd}P_e \rangle &= \frac{4}{3}\sigma_3\epsilon_{abcde}, \\ \langle Z_{ab}Z_{cd}P_e \rangle &= \frac{4}{3}\sigma_1\epsilon_{abcde}, & \langle Z_{ab}Z_{cd}Z_e \rangle &= \frac{4}{3}\sigma_3\epsilon_{abcde}, \end{aligned}$$

Luego, considerando la 1-forma conexión  $A$  y las componentes del tensor invariante en la expresión general de la acción CS en  $5D$

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{e}_5\text{-CS}}^{5D} &= k \int \sigma_1 \left[ \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e \right) + \tilde{\mathcal{L}}_1(\omega, e, k, h) \right] \\ &\quad + \sigma_3 \left[ \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} e^c e^d e^e \right) + \tilde{\mathcal{L}}_3(\omega, e, k, h) \right] \end{aligned}$$

donde  $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$ .

# Gravedad CS y acción PL en $D = 5$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_1 = & \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} k_f^c k^{fd} + \frac{1}{\ell} k_f^a k^{fb} k_g^c k^{gd} + \frac{2}{\ell^5} h^a h^b e^c e^d + \frac{1}{\ell^5} h^a h^b h^c h^d + \frac{1}{\ell} Dk^{ab} Dk^{cd} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3\ell^3} Dk^{ab} e^c e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^c e^d + \frac{2}{\ell^3} k_f^a k^{fb} h^c e^d + \frac{2}{\ell^3} Dk^{ab} h^c h^d \right) e^e \\ & + \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} Dk^{ab} R^{cd} + \frac{2}{\ell} Dk^{ab} k_f^c k^{fd} + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} h^c h^d + \frac{2}{3\ell^3} k_f^a k^{fb} h^c h^d \right) h^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_3 = & \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3\ell^3} k_f^a k^{fb} e^c e^d + \frac{1}{\ell^5} h^a e^b e^c e^d + \frac{2}{\ell^5} h^a h^b h^c e^d + \frac{2}{\ell^3} Dk^{ab} h^c e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^c h^d \right. \\ & \left. + \frac{2}{\ell^3} k_f^a k^{fb} h^c h^d + \frac{2}{\ell} Dk^{ab} R^{cd} + \frac{2}{\ell} Dk^{ab} k_f^c k^{fd} \right) e^e + \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{5\ell^5} h^a h^b h^c h^d \right. \\ & \left. + \frac{2}{3\ell^3} Dk^{ab} h^c h^d + \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} + \frac{2}{\ell} R^{ab} k_f^c k^{fd} + \frac{1}{\ell} k_f^a k^{fb} k_g^c k^{gd} + \frac{1}{\ell} Dk^{ab} Dk^{cd} \right) h^e. \end{aligned}$$

# Gravedad CS y acción PL en $D = 5$

Imponiendo  $\sigma_3 = 0$  y una configuración libre de materia ( $k^{ab} = h^a = 0$ ), la acción queda

$$I^{5D} = k \int \sigma_1 \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e \right),$$

la cual parece tener la estructura del maximal PL ( $p = 2$ ).

Sin embargo, los signos no coinciden. Las constantes PL satisfacen para  $D = 5$  y  $p = 2$

$$a_2 = \kappa \quad \text{y} \quad \alpha_0 = -\frac{1}{5\ell^4} \kappa$$

$$I_{\text{PL}}^{5D} = \kappa \int \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e - \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e \right)$$

Considerar el álgebra  $dS$  tampoco solucionaría el problema puesto que la acción CS para  $dS$  en  $5D$  viene dada por

$$I_{dS\text{-CS}}^{5D} = \kappa \int \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e - \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} e^c e^d e^e + \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e \right),$$

de modo que independiente del álgebra original, el término cosmológico y el término más alto en curvatura siempre tendrán el mismo signo.

# Gravedad CS y acción PL en $D = 5$

Sea la 1-forma conexión para  $\mathfrak{E}_7$

$$A = \frac{1}{2} \omega^{ab,(i)} J_{ab,(i)} + \frac{1}{\ell} e^{a,(i)} P_{a,(i)},$$

con  $i = 0, 1, 2$  y donde la conexión de spin y el vielbein vienen definidos como  $\omega^{ab} = \omega^{ab,(0)}$  y  $e^a = e^{a,(0)}$ , respectivamente. Es posible mostrar que las componentes del tensor invariante para  $\mathfrak{E}_7$  vienen dadas por

$$\left\langle J_{ab,(q)} J_{cd,(r)} P_{e,(s)} \right\rangle = \frac{4}{3} \sigma_{2u+1} \delta_{j(q,r,s)}^u \epsilon_{abcde}$$

donde  $j(q, r, s) = (q + r + s) \bmod (3)$ .

$$I_{\mathfrak{E}_7\text{-CS}}^{5D} = k \int \sum_{i=0}^2 \sigma_{2i+1} \mathcal{L}_{2i+1},$$

$$\mathcal{L}_{2i+1} = \epsilon_{abcde} \left( \frac{\delta_{j(q,r,s)}^i}{\ell} R^{ab,(q)} R^{cd,(r)} e^{e,(s)} + \frac{2\delta_{j(q,r,s,u,1)}^i}{3\ell^3} R^{ab,(q)} e^{c,(r)} e^{d,(s)} e^{e,(u)} \right. \\ \left. + \frac{\delta_{j(q,r,s,u,v,2)}^i}{5\ell^5} e^{a,(q)} e^{b,(r)} e^{c,(s)} e^{d,(u)} e^{e,(v)} \right)$$

# Gravedad CS y acción PL en $D = 5$

Separando los términos puramente gravitacional  $(\omega, e)$  de aquellos conteniendo campos extra  $(\omega^{(i)}, e^{(i)})$  con  $i \neq 0$  tenemos

$$I_{\mathfrak{C}_7\text{-CS}}^{5D} = k \int \sigma_1 \left[ \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e \right) + \tilde{\mathcal{L}}_1(\omega^{(i)}, e^{(j)}) \right] \\ + \sigma_3 \left[ \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} e^c e^d e^e \right) + \tilde{\mathcal{L}}_3(\omega^{(i)}, e^{(j)}) \right] \\ + \sigma_5 \left[ \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e \right) + \tilde{\mathcal{L}}_5(\omega^{(i)}, e^{(j)}) \right].$$

Imponiendo  $\sigma_3 = 0$  y  $\sigma_5 = -\sigma_1$ , el límite  $\omega^{(i \neq 0)} = e^{(i \neq 0)} = 0$  conduce al acción del **maximal Pure Lovelock** ( $p = 2$ )

$$I_{\text{CS} \rightarrow \text{PL}}^{5D} = k \int \sigma_1 \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e - \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e \right).$$

Otra elección no trivial de las constantes es considerar  $\sigma_1 = 0$  y  $\sigma_3 = \sigma_5$ . Esta elección permite obtener la acción de Pure Lovelock para  $p = 1$ . De esta forma, hemos mostrado que la acción PL de orden  $p$  arbitrario en  $5D$  puede ser obtenida desde un acción CS invariante bajo  $\mathfrak{C}_7$ .

# Gravedad CS y acción PL en $D = 5$

A pesar de obtener la acción de PL en 5 dimensiones, el limite en la dinámica no conduce a la dinámica de PL. En efecto, considerando  $\sigma_3 = 0, \sigma_5 = -\sigma_1$  y una configuración libre de materia, las ecuaciones de campo vienen dadas por

$$0 = \epsilon_{abcde} \left( R^{ab} R^{cd} - \frac{1}{\ell^4} e^a e^b e^c e^d \right) \delta e^e,$$

$$0 = \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell^2} R^{ab} e^c e^d - \frac{1}{\ell^4} e^a e^b e^c e^d \right) \delta h^{e,(1)},$$

$$0 = \epsilon_{abcde} \left( R^{ab} R^{cd} - \frac{2}{\ell^2} R^{ab} e^c e^d \right) \delta h^{e,(2)},$$

$$0 = \epsilon_{abcde} \left( R^{cd} T^e \right) \delta \omega^{ab},$$

$$0 = \epsilon_{abcde} \left( e^c e^d T^e \right) \delta k^{ab,(1)},$$

$$0 = \epsilon_{abcde} \left( R^{cd} T^e - \frac{2}{\ell^2} e^c e^d T^e \right) \delta k^{ab,(2)}.$$

La solución debe satisfacer simultáneamente las ecuaciones de maximal PL ( $p = 2$ ) y otras ecuaciones inusuales. Notemos sin embargo que la presencia de campos adicionales conducen gratuitamente a  $T^a = 0$ .

# Gravedad CS y acción PL en $D = 7$

$$I_{CS}^{7D} = k \int \left\langle A (dA)^3 + \frac{8}{5} A^3 (dA)^2 + \frac{4}{5} A (dA) A^2 (dA) + 2A^5 dA + \frac{4}{7} A^7 \right\rangle$$

Las simetrías  $\mathfrak{e}_m$  permiten separar los términos gravitacionales en distintos sectores.

	$\sigma_1$	$\sigma_3$	$\sigma_5$	$\sigma_7$
$\mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4$	<i>RRRe, RReee, Reeeee, eeeeeee</i>			
$\mathfrak{e}_5, \mathfrak{e}_6$	<i>RRRe, RReee</i>	<i>RReee, eeeeeee</i>		
$\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$	<i>RRRe, eeeeeee</i>	<i>RReee</i>	<i>Reeeee</i>	
$\mathfrak{e}_{m \geq 9}$	<i>RRRe</i>	<i>RReee</i>	<i>Reeeee</i>	<i>eeeeeee</i>

# Gravedad CS y acción PL en $D = 7$

$$\begin{aligned}
 I_{\mathfrak{e}_7\text{-CS}}^{7D} = k \int \sigma_1 & \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g + \frac{1}{7\ell^7} e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_1(\omega^{(i)}, e^{(j)}) \right] \\
 & + \sigma_3 \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{1}{\ell^3} R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_3(\omega^{(i)}, e^{(j)}) \right] \\
 & + \sigma_5 \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{3}{5\ell^5} R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_5(\omega^{(i)}, e^{(j)}) \right],
 \end{aligned}$$

con  $i, j = 0, 1, 2$ . Notemos que el término proporcional a  $\sigma_1$  contiene al maximal PL y a términos conteniendo nuevos campos  $(\omega^{(i \neq 0)}, e^{(i \neq 0)})$ .

Imponiendo  $\sigma_3 = \sigma_5 = 0$  y considerando una configuración libre de materia  $(\omega^{(i \neq 0)} = e^{(i \neq 0)} = 0)$ , la acción reproduce el maximal PL ( $p = 3$ ):

$$I_{\text{CS} \rightarrow \text{PL}}^{7D} = k \int \sigma_1 \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g + \frac{1}{7\ell^7} e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g \right)$$

A diferencia del caso en 5 dimensiones, los términos del maximal PL para  $D = 7$  tienen el mismo signo.

# Gravedad CS y acción PL en $D = 7$

$$\begin{aligned}
 I_{\mathfrak{e}_9\text{-CS}}^{7D} = & k \int \sigma_1 \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_1 \left( \omega^{(i)}, e^{(j)} \right) \right] \\
 & + \sigma_3 \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{1}{\ell^3} R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_3 \left( \omega^{(i)}, e^{(j)} \right) \right] \\
 & + \sigma_5 \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{3}{5\ell^5} R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_5 \left( \omega^{(i)}, e^{(j)} \right) \right] \\
 & + \sigma_7 \left[ \epsilon_{abcdefg} \left( \frac{1}{7\ell^7} e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g \right) + \tilde{\mathcal{L}}_7 \left( \omega^{(i)}, e^{(j)} \right) \right],
 \end{aligned}$$

con  $i, j = 0, 1, 2, 3$ . Cada orden  $p$  del PL puede ser obtenido después de imponer las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll}
 p = 1 : & \sigma_1 = \sigma_3 = 0, & \sigma_5 = \sigma_7, \\
 p = 2 : & \sigma_1 = \sigma_5 = 0, & -\sigma_3 = \sigma_7, \\
 p = 3 : & \sigma_3 = \sigma_5 = 0, & \sigma_1 = \sigma_7.
 \end{array}$$

Otras elecciones no triviales de los  $\sigma$ 's conducen a otras interesantes teorías de gravedad. Por ejemplo,  $\sigma_5 = \sigma_1$  o  $\sigma_5 = \sigma_3$  conducen a acciones del tipo  $EH + LL$ .

# Generalización a dimensiones mayores

Las constantes del acción PL satisfacen

$$\alpha_p = \frac{1}{(D-2p)!} \kappa \quad \text{y} \quad \alpha_0 = -\frac{(\mp 1)^p}{D(D-2p-1)! \ell^{2p}} \kappa,$$

Luego, ambos términos tendrán el mismo signo solo para valores impares de  $p$ . Esto implica que en  $D = 3, 7, 11, \dots, 4k - 1$ , el maximal PL no presenta signos distintos. De esta forma, podemos generalizar nuestros resultados de la siguiente manera:

- Para  $D = 4k - 1$ , el álgebra más pequeña de la familia  $\mathfrak{C}_m$  que permite obtener maximal PL ( $p = 2k - 1$ ) es dado por  $\mathfrak{C}_D$ , mientras que cualquier otro orden  $p = 1, \dots, 2k - 2$  del PL requiere del uso de  $\mathfrak{C}_{D+2}$ .
- Para  $D \neq 4k - 1$ , el álgebra más pequeña de la familia  $\mathfrak{C}_m$  que permite obtener el PL de orden arbitrario  $p = 1, \dots, \frac{D-1}{2}$  es dado por  $\mathfrak{C}_{D+2}$ .

# Table of Contents

- 1 **Introducción**
  - Gravedad de Lanczos-Lovelock
  - Gravedad Pure Lovelock
- 2 **Algebras  $\mathfrak{E}_m$  y  $S$ -expansión**
  - ¿Porqué las álgebras  $\mathfrak{E}_m$ ?
  - Álgebras  $\mathfrak{E}_m$  y  $S$ -expansión
- 3 **Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock**
  - Gravedad Chern-Simons y acción Pure Lovelock en  $D = 5$
  - Generalización a dimensiones mayores
- 4 **Conclusión**

# Conclusión

Hemos mostrado que la **acción Pure Lovelock** de orden  $p$  puede ser obtenida como un límite de la **teoría Chern-Simons de gravedad** haciendo uso de las álgebras  $\mathfrak{C}_m$

No obstante, hemos encontrado dificultades en el límite de la dinámica debido a la presencia de ecuaciones de campo adicionales. Interesantemente, los nuevos campos entregan explícitamente la condición libre de torsión, la cual seguramente tendrá útiles consecuencias al momento de estudiar posibles versiones supersimétricas de la teoría PL.

Además el procedimiento usado aquí, permitió también relacionar las teorías CS con otras teorías de gravedad. Esto podría ser útil en la búsqueda de alguna relación entre supergravedad estandar y teorías CS de supergravedad para alguna simetría especial.

# Gracias

$$I_{\mathfrak{e}_7\text{-CS}}^{5D} = k \int \sigma_1 \left[ \epsilon_{abcde} \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} e^e + \tilde{\mathcal{L}}_1 \left( \omega, e, k^{(1)}, h^{(1)}, k^{(2)}, h^{(2)} \right) \right] \\ + \sigma_3 \left[ \epsilon_{abcde} \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} e^c e^d e^e + \tilde{\mathcal{L}}_3 \left( \omega, e, k^{(1)}, h^{(1)}, k^{(2)}, h^{(2)} \right) \right] \\ + \sigma_5 \left[ \epsilon_{abcde} \frac{1}{5\ell^5} e^a e^b e^c e^d e^e + \tilde{\mathcal{L}}_5 \left( \omega, e, k^{(1)}, h^{(1)}, k^{(2)}, h^{(2)} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_1 = & \epsilon_{abcde} \left( \frac{4}{\ell} R^{ab} k_f^{c,(1)} k^{fd,(2)} + \frac{4}{\ell} k_f^{a,(1)} k^{fb,(2)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} + \frac{2}{\ell} R^{ab,(1)} R^{cd,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(1)} h^{d,(1)} \right. \\
& + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab,(2)} e^c e^d + \frac{1}{\ell^5} h^{a,(1)} e^b e^c e^d \\
& + \frac{1}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{2}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} e^c e^d + \frac{6}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(1)} h^{c,(2)} e^d \\
& \left. + \frac{4}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \right) e^e + \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} R^{cd,(2)} + \frac{1}{\ell} R^{ab,(1)} R^{cd,(1)} + \frac{4}{\ell} R^{ab,(2)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} \right. \\
& + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{6}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(2)} e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \\
& \left. + \frac{2}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} \right) h^{e,(1)} + \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} R^{cd,(1)} + \frac{1}{\ell} R^{ab,(2)} R^{cd,(2)} + \frac{4}{\ell} R^{ab,(1)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} \right. \\
& + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} e^c e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(1)} h^{d,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{6}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} e^d \\
& \left. + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} + \frac{1}{5\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \right) h^{e,(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_3 = & \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} R^{cd,(1)} + \frac{1}{\ell} R^{ab,(2)} R^{cd,(2)} + \frac{4}{\ell} R^{ab,(1)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} + \frac{6}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(1)} h^{d,(2)} \right. \\
& + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(2)} e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \\
& + \frac{2}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(1)} e^c e^d + \frac{1}{\ell^5} h^{a,(2)} e^b e^c e^d + \frac{1}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} + \frac{4}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} \\
& + \left. \frac{6}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} e^d \right) e^e + \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} + \frac{2}{\ell} R^{ab,(1)} R^{cd,(2)} + \frac{4}{\ell} R^{ab} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} \right. \\
& + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(2)} \\
& + \left. \frac{1}{5\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{2}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(1)} \right) h^{e,(1)} \\
& + \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} R^{cd,(2)} + \frac{1}{\ell} R^{ab,(1)} R^{cd,(1)} + \frac{4}{\ell} R^{ab,(2)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} \right. \\
& + \left. \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(2)} + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \right) h^{e,(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_5 = & \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} R^{cd,(2)} + \frac{1}{\ell} R^{ab,(1)} R^{cd,(1)} + \frac{4}{\ell} R^{ab,(2)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \right. \\
& + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab,(1)} e^c e^d + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(2)} e^d + \frac{2}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(1)} h^{c,(1)} e^d \\
& + \frac{2}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} e^d + \frac{4}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(2)} e^c e^d + \left. \frac{6}{\ell^5} h^{a,(1)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(1)} \right) e^e \\
& + \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{\ell} R^{ab} R^{cd,(1)} + \frac{1}{\ell} R^{ab,(2)} R^{cd,(2)} + \frac{4}{\ell} R^{ab,(1)} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} e^c e^d \right. \\
& + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(1)} h^{d,(2)} + \frac{6}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(2)} e^d + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \\
& + \left. \frac{1}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(1)} h^{c,(1)} h^{d,(1)} + \frac{1}{\ell^5} h^{a,(2)} h^{b,(2)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} \right) h^{e,(1)} \\
& + \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{\ell} R^{ab} R^{cd} + \frac{2}{\ell} R^{ab,(1)} R^{cd,(2)} + \frac{4}{\ell} R^{ab} k_g^{c,(1)} k^{gd,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab} h^{c,(1)} h^{d,(1)} \right. \\
& + \left. \frac{6}{\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(1)} e^d + \frac{2}{3\ell^3} R^{ab,(1)} h^{c,(2)} h^{d,(2)} + \frac{2}{\ell^3} R^{ab,(2)} h^{c,(1)} h^{d,(2)} \right) h^{e,(2)} ,
\end{aligned}$$