

# Inestabilidad de las cuerdas negras en la teoría de Gauss-Bonnet

Aldo Vera Serón

En colaboración con Dr. Alex Giacomini y Dr. Julio Oliva

Encuentro CosmoConce 2015

Se reporta la existencia de inestabilidades perturbativas en las cuerdas negras como soluciones de la teoría de Gauss-Bonnet en siete dimensiones, aportando de esta forma evidencia a la conjetura de Gubser-Mitra en el contexto de teorías con potencias superiores en la curvatura.

# Contenidos:

- Teoría de Lovelock
- Agujeros negros y objetos extendidos
- Inestabilidad de la cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet
- Conclusiones

# Acción de Lanczos-Lovelock

Teoría métrica más general que describe la interacción gravitatoria, compatible con la conservación del tensor de energía-momentum y que conduce a ecuaciones de segundo orden en la métrica:

$$S = \int \sum_{k=0}^{\left[\frac{D}{2}\right]} \alpha_k \mathcal{L}^k,$$

donde

$$\mathcal{L}^k = \epsilon_{a_1 \dots a_{2k} a_{2k+1} \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1} \dots a_D},$$

con  $R^{ab} = de^a + \omega^a{}_c \omega^{cb}$ .

# Ecuaciones de campo de Lanczos-Lovelock

Variando la acción con respecto a  $e^a$  y  $\omega^{ab}$  se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \alpha_k (D - 2k) \varepsilon_a^k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \alpha_k k (D - 2k) \varepsilon_{ab}^k = 0,$$

donde

$$\varepsilon_a^k = \epsilon_{aa_1 \dots a_{D-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \dots e^{a_{D-1}},$$

$$\varepsilon_{ab}^k = \epsilon_{aba_1 \dots a_{D-2}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} T^{a_{2k+1}} e^{a_{2k+2}} \dots e^{a_{D-1}}.$$

# Agujeros negros en la teoría de Lovelock

Métrica estacionaria y esféricamente simétrica

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} + r^2 d\hat{\Sigma}_\gamma^2$$

con  $d\hat{\Sigma}_\gamma^2$  la métrica de un espacio  $(D - 2)$  dimensional de curvatura constante  $\gamma$ , la que puede tomar valores normalizados de  $+1, 0, -1$ .  
Introducimos una base ortonormal  $\{e^a\}$ ,

$$e^0 = f(r)dt, \quad e^1 = \frac{1}{f(r)}dr, \quad e^i = r\hat{e}^i,$$

# Agujeros negros en la teoría de Lovelock

Considerando torsión nula se obtiene

$$R^{01} = Ae^0e^1, \quad R^{0i} = Be^0e^i, \quad R^{1i} = Ce^1e^i, \quad R^{ij} = Ee^ie^j,$$

donde

$$A = -\frac{1}{2}[f^2(r)]'', \quad B = C = -\frac{[f^2(r)]'}{2r}, \quad E = \frac{1}{r^2}[\gamma - f^2(r)].$$

Ecuación maestra

$$\mu = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_k (D-2k) [r^{d-2k-1} (\gamma - f^2(r))^k],$$

consideramos  $\gamma = 1$  para agujeros negros esféricamente simétricos.

# Agujeros negros en Einstein-Gauss-Bonnet

Consideramos  $\alpha_k = 0$  para  $k \geq 3$

$$f^2(r) = 1 + \frac{\alpha_1(D-2)r^2}{2\alpha_2(D-4)} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha_0\alpha_2(D-4)}{\alpha_1^2(D-2)^2} + \frac{4\alpha_2(D-4)\mu}{\alpha_1^2(D-2)r^{d-1}}} \right),$$

- Rama +

Solución de Boulware-Deser

$\alpha \rightarrow 0$  se recupera solución de Schwarzschild-Tangherlini-(A)dS.

- Rama -

Singularidad desnuda.

Esta solución entrega correcciones a pequeñas escalas a Relatividad General.



# Agujeros negros en Gauss-Bonnet

Considerando  $\alpha_2 \neq 0$ , la solución es

$$f^2(r) = 1 \pm \frac{1}{r^{\frac{D-5}{2}}} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha_2(D-4)}}.$$

Solución de agujero negro en  $D = 6$

$$f^2(r) = 1 - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\mu}{2\alpha_2}}.$$

# Compactificación simple

Teoría de Kaluza-Klein:

- Espacio-tiempo en  $D = 5$  con dimensión extra compacta
- Al compactificar se obtiene Einstein-Maxwell-Dilatón en  $D = 4$

**Compactificación simple:** compactificación *a la* Kaluza-Klein sin campos de gauge adicionales y dilatón constante.

Las soluciones son de la forma  $M_D = \mathcal{M}_{D-p} \times K_p$ , con  $\mathcal{M}_{D-p}$  una variedad Lorentziana y  $K_p$  una variedad Euclídea compacta de curvatura constante.

# Cuerda negra

Consideremos la teoría de Einstein en  $D = 5$  en el vacío.

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Esta ecuación admite las soluciones

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + d\Sigma_3^2, \\ ds^2 &= d\tilde{s}_4^2(x^\mu) + dz^2, \end{aligned}$$

con  $d\tilde{s}_4^2$  la métrica de Schwarzschild en cuatro dimensiones.

Solución de cuerda negra homogénea con horizonte cilíndrico.

Al considerar la dimensión extra compacta, la cuerda adquiere masa finita.

Agujero negro vs Cuerda negra.

¿Cuál de estas configuraciones es físicamente relevante?

- Argumento termodinámico:

En Relatividad General en  $D = 5$

$$S_{\text{BH}} \sim M^{\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}}, \quad S_{\text{BS}} \sim M^2,$$

si la longitud de la cuerda es suficientemente grande, la configuración preferida termodinámicamente es la de agujero negro.

# Inestabilidad de Gregory-Laflamme

## ■ Inestabilidad perturbativa

$$g_{\mu\nu} = \mathring{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

$$h_{\mu\nu}(t, r, z) = e^{\Omega t} e^{ikz} H_{\mu\nu}(r).$$

En Gregory-Laflamme:

Como se busca inestabilidad, se requieren modos crecientes.

Se estudia el comportamiento asintótico de una ecuación maestra en el horizonte y el infinito.

Se obtiene una solución que liga las ramas asintóticas bien comportadas, por lo tanto hay inestabilidad.

# Solución de cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet

Queremos estudiar inestabilidades en teorías cuadráticas en la curvatura.

No se conocen soluciones analíticas de cuerda negra en Einstein-Gauss-Bonnet.

Por simplicidad consideraremos únicamente el término cuadrático de Gauss-Bonnet en  $D = 7$

$$S_{EGB} [g] = \frac{\alpha}{16\pi G} \int d^7x \sqrt{-g} \left[ R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right].$$

# Solución de cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet

Solución de agujero negro esféricamente simétrico

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\mu}{r}} + r^2 d\Omega_5^2.$$

Solución de cuerda negra homogénea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r^{1/2}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{m}{r^{1/2}}} + r^2 d\Omega_4^2 + dz^2.$$

Las constantes  $m$  y  $\mu$  determinan la masa de estas configuraciones y  $d\Omega_n$  es el elemento de la línea de una  $n$ -esfera,  $S^n$ .

# Inestabilidad de la cuerda negra

Argumento termodinámico:

En dimensiones arbitrarias se tiene que

$$S_{\text{BH}} \sim M^{\frac{D-4}{D-5}}, S_{\text{BS}} \sim M^{\frac{D-5}{D-6}}.$$

Estas entropías se cruzan para un valor de masa crítica  $M_c$

$$\text{Si } M < M_c \rightarrow S_{\text{BH}} > S_{\text{BS}},$$

$$\text{Si } M > M_c \rightarrow S_{\text{BH}} < S_{\text{BS}}.$$

Conjetura de Gubser-Mitra: En soluciones de objetos extendidos se presenta tanto inestabilidad termodinámica como perturbativa.

¿Ocurre lo mismo para teorías de mayor orden en la curvatura?



# Inestabilidad de la cuerda negra

Consideremos un cambio de coordenadas en la solución de cuerda negra en  $D = 7$  de la forma

$$r = \left( \frac{m}{1-x} \right)^2 ,$$

transformación que mapea  $r \in [m^2, +\infty[$  en  $x \in [0, 1[$  .

En estas nuevas coordenadas la métrica adopta la forma

$$ds_{BS7}^2 = -xdt^2 + \frac{4m^4 dx^2}{x(1-x)^6} + \left( \frac{m}{1-x} \right)^2 d\Omega_4^2 + dz^2 .$$

# Inestabilidad de la cuerda negra

Aplicamos una perturbación tipo s-wave de la forma

$$h_{\mu\nu}(t, x, z) = e^{\Omega t} e^{ikz} \left( \begin{array}{cc|c|c} H_{tt}(x) & H_{tx}(x) & 0 & 0 \\ H_{tx}(x) & H_{xx}(x) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & H(x) \sigma_{S^4} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde  $\sigma_{S^4}$  es la métrica de la 4-esfera y  $k$  es el número de onda a lo largo de la dirección  $z$ . Un modo inestable corresponde a una solución acotada de las ecuaciones linealizadas de Gauss-Bonnet con  $\Omega$  positivo.

# Inestabilidad de la cuerda negra

Es posible demostrar que las ecuaciones de campo linealizadas implican que las componentes de la perturbación pueden ser escritas únicamente en términos de la función  $H_{tx}(x)$  que satisface la siguiente ecuación maestra

$$A(x)H''_{tx} + B(x)H'_{tx} + C(x)H_{tx} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} A(x) &= (1-x)^6 x^2 ((1-x)^6 - (12k^2 x + 16\Omega^2)m^4), \\ B(x) &= 3x(1-x)^5 ((32k^2 x^2 + 48x\Omega^2 - 8k^2 x - 16\Omega^2)m^4 + (1-x)^7), \\ C(x) &= 4(4\Omega^2 + 3k^2 x)^2 m^8 + (1-x)^5 (45k^2 x^2 + 164x\Omega^2 + 3k^2 x - 20\Omega^2) \end{aligned}$$

# Inestabilidad de la cuerda negra

Esta ecuación es invariante bajo las transformaciones

$$m \rightarrow \alpha m, \Omega \rightarrow \alpha^{-2} \Omega, k \rightarrow \alpha^{-2} k$$

El comportamiento de la función  $H_{tx}(x)$  en el horizonte ( $x \rightarrow 0$ ) y en infinito el ( $x \rightarrow +1$ ) es dado por

$$H_{tx} \xrightarrow{x \rightarrow 0} C_{\pm} x^{-1 \pm 2m^2 \Omega} (1 + \mathcal{O}(x))$$

$$H_{tx} \xrightarrow{x \rightarrow 1} E_{\pm} (1-x)^{\alpha_{\pm}} e^{\mp \frac{m^2 \sqrt{3k^2 + 4\Omega^2}}{2(1-x)^2} \mp \frac{(8\Omega^2 + 3k^2)m^2 \sqrt{3k^2 + 4\Omega^2}}{2(3k^2 + 4\Omega^2)(1-x)}} (1 + \mathcal{O}(1-x))$$

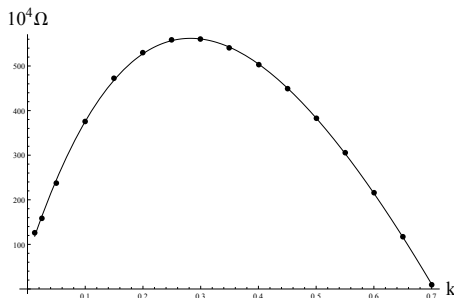
con

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 - 12(3k^2 + 4\Omega^2)^2 \pm m^2 (144k^2 \Omega^2 + 128\Omega^4 + 27k^4) \sqrt{3k^2 + 4\Omega^2}}{(3k^2 + 4\Omega^2)^2}.$$

# Inestabilidad de la cuerda negra

Necesitamos encontrar una solución numérica que interpole entre la rama con  $+$  en el horizonte y la rama con  $-$  en el infinito.

El espectro de modos inestables es



**Figure :** Gráfica de  $\Omega$  vs  $k$  para la cuerda negra homogénea en Gauss-Bonnet en  $D = 7$ . El parámetro  $m$  en la solución ha sido fijado a 1.

- Las cuerdas negras en la teoría de Gauss-Bonnet son inestables perturbativamente.
- Existe un valor mínimo en la longitud de onda  $\lambda_{\min}$  por encima del cual la inestabilidad ocurre. Esto implica a la vez la existencia de una longitud crítica de la cuerda sobre la cual la inestabilidad se presenta, tal como ocurre con las cuerdas negras en Relatividad General.

Esta inestabilidad es física, ya que la perturbación no es gauge puro.

- *Black Strings in Gauss-Bonnet Theory are Unstable*

*Alex Giacomini, Julio Oliva, Aldo Vera. Arxiv: 1503.03696.*

*Enviado a Physical Review Letters*

- En progreso

- *Black Strings and black  $p$ -branes in Lovelock Theory are Unstable*

# Gracias