Cosmo Conce
2015

Una acción para gravedad Chern-Simons en cuatro dimensiones

P. Salgado
Grupo de Gravitación y Cosmología
Departamento de Física
Universidad de Concepción
Marzo 2015

Presentación

- Motivación
- Gravitación como teoría de gauge
- Teoría de gauge extendida
- Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares
- Formas de transgresión en dimensiones pares
- Teorema de Chern-Weil generalizado
- Álgebras diferenciales libres y formas compuestas
- Álgebras diferenciales libres (FDA)
- Formalimo de D'Auria-Fre
- Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell
- Gravedad Chern-Simons en $D = 4$

- Teoría de cuerdas $\longrightarrow$ Predicen campos de gauge tensoriales.
- Límite de bajas energías $\longrightarrow$ Estados sin masa pueden ser identificados como quanta de Yang-Mills.
- Supergravedad en $D = 10, 11 \longleftrightarrow$ Campos tensoriales de gauge anti-simétricos.

Ejemplos:

(a) **Partícula cargada en un potencial electromagnético**

$$S_{EM} = -q \int dx^{\mu} A_{\mu} - \frac{1}{4} \int d^{D}x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

- Simetría de gauge

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\varepsilon(x) \quad \longrightarrow \quad F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x)$$

donde

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x).$$

Motivación

(b) **Campo de Kalb-Ramond $\longleftrightarrow$ Campo tensorial antisimétrico de dos índices.**

- Cuerda en el campo de Kalb-Ramond:

$$S_{KR} = -\int dx^{\mu} dx^{\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{12}\int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}.$$

(b) **Campo de Kalb-Ramond $\longleftrightarrow$ Campo tensorial antisimétrico de dos índices.**

- Cuerda en el campo de Kalb-Ramond:

$$S_{KR} = -\int dx^{\mu} dx^{\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{12} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}.$$

- Simetría de gauge

$$\delta B_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}(x) \qquad \longrightarrow \qquad H'_{\mu\nu\rho} = H_{\mu\nu\rho}$$

donde

$$H_{\mu\nu\rho}(x) = \partial_{\mu} B_{\nu\rho} + \partial_{\nu} B_{\rho\mu} + \partial_{\rho} B_{\mu\nu}.$$

Motivación

(b) **Campo de Kalb-Ramond $\longleftrightarrow$ Campo tensorial antisimétrico de dos índices.**

- Cuerda en el campo de Kalb-Ramond:

$$S_{KR} = -\int dx^\mu dx^\nu B_{\mu\nu} - \frac{1}{12}\int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}.$$

- Simetría de gauge

$$\delta B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) - \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) \qquad \longrightarrow \qquad H'_{\mu\nu\rho} = H_{\mu\nu\rho}$$

donde

$$H_{\mu\nu\rho}(x) = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}.$$

- Esto motiva estudiar una teoría de campos para un campo tensorial de gauge antisimétrico sin masa, del tipo $B_{\mu\nu}$, que generalice las simetrías de Yang-Mills.

Motivación

En el último tiempo han sido llevadas a cabo investigaciones en esta dirección. Ver por ejemplo:

- G. Savvidy, Int. J. Mod. Phys. A 21 (2006) 4931-4977.
- G. Savvidy, Phys. Lett. B 625 (2005) 341.
- S. Konitopoulos and G. Savvidy, J. Phys. A 41 (2008) 355402.
- J. Barrett and G. Savvidy, Phys. Lett. B 652 (2007) 141-145.
- S. Guttenberg and G. Savvidy, Mod. Phys. Lett. A 23 (2008) 999.

Gravitación como teoría de gauge

- Una posible manera de encontrar una teoría de gauge para gravedad es construyendo una accion basada en formas de Chern-Simons.

- Durante las últimas décadas han sido construidas acciones basadas en formas de Chern-Simons o en formas de Transgresión. Sin embargo esto es posible sólo en dimensiones impares.

Teoría de gauge extendida

- G. Savvidy, Phys. Lett. B 694 (2010) 65 $\longrightarrow$ invariantes topológicos en cinco dimensiones $\longrightarrow$ forma invariante de gauge independiente de la métrica $\longleftrightarrow$ análogo cuadridimensional de la forma Chern-Simons.

- I. Antoniadis, G. Savvidy, Eur. Phys. J. C 72 (2012) 2140; In. J. Mod. Phys. A 29 (2014) 1450027; S. Konitopoulos an G. Savvidy, J. Math. Phys. 55 (2014)06234 $\longrightarrow$ mayores dimensiones.

Teoría de gauge extendida

Campos de gauge y sus curvaturas:

$$A = A_\mu dx^\mu = A^a_\mu T_a dx^\mu, \qquad B = A^a_{\mu,\nu} T_a dx^\mu dx^\nu,$$

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \qquad H = F_{\mu\nu,\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda,$$

donde

$$F = dA + A^2, \qquad H = DB = dB + [A, B]. \tag{1}$$

satisfacen las siguientes identidades de Bianchi,

$$DF = 0, \qquad DH + [B, F] = 0. \tag{2}$$

Teoría de gauge extendida

Las variaciones infinitesimales de los campos de gauge y de sus correspondientes curvaturas vienen dadas por,

$$\delta A = D\xi_0, \qquad \delta F = D(\delta A) = [F, \xi_0],$$
$$\delta B = D\xi_1 + [B, \xi_0], \qquad \delta H = D(\delta B) + [\delta A, B],$$

donde $\boldsymbol{\xi}_0 = \xi^a T_a$ y $\boldsymbol{\xi}_1 = \xi^a_\mu T_a dx^\mu$ son 0-formas y 1-formas parámetros de gauge respectivamente.

Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares

G. Savvidy, Phys. Lett. B 694 (2010) 65

$$\downarrow$$

$$\Gamma = \langle FH \rangle \longleftrightarrow \text{ Invariante topológico en } 4+1 \text{ dimensiones}$$

I. Antoniadis, G. Savvidy, Eur. Phys. J. C 72 (2012) 2140
In. J. Mod. Phys. A 29 (2014) 1450027
S. Konitopoulos, G. Savvidy, J. Math. Phys. 55 (2014)06234]

$$\downarrow$$

$$\Gamma_{2n+3} = \langle F^n H \rangle \longleftrightarrow \text{ Invariante topológico en } 2n+3 \text{ dimensiones}$$

$$\downarrow$$

es una forma cerrada (análoga al invariante de Chern-Pontrjagin $\mathcal{P}_{2n+2}{=}\langle F^n \rangle$)

Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares

- El lema de Poincaré $\longrightarrow \Gamma_{2n+3} = d\mathcal{C}^{2n+2}_{hss}$.
- $\mathcal{C}^{2n+2}_{hss}$ se obtiene de manera análoga al caso de las de formas de Chern-Simons en D impar.
- Puesto que

$$\delta F = D(\delta A), \quad \delta H = D(\delta B) + [\delta A, B],$$

se encuentra

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{2n+3} &= \delta\langle F^n H\rangle \\ &= \langle \delta F F^{n-1} H + \cdots + F^{n-1}\delta F H + F^n \delta H\rangle \\ &= d\langle \delta A F^{n-1} H + \cdots + F^{n-1}\delta A H + F^n \delta B\rangle. \end{aligned}$$

Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares

- Parametrizando los campos de gauge y sus curvaturas como,

$$
\begin{aligned}
A_t &= tA, \quad F_t = tF + (t^2 - t)A^2 = tdA + t^2 A^2, \\
B_t &= tB, \quad H_t = tH + (t^2 - t)[A, B] = tdB + t^2 [A, B].
\end{aligned}
$$

  se encuentra que la $(2n+2)$-forma Chern-Simons-Savvidy es dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{hss}^{2n+2}(A, B) &= \int_0^1 dt \left\langle \left(AF_t^{n-1} + F_t A F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1} A \right) H_t \right. \\
&\quad \left. + F_t^n B \right\rangle . \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares

- Para $n = 1$ se encuentra,

$$\mathcal{C}^4_{hss} = \int_0^1 dt \langle A F_{3t} + F_t B \rangle = \langle FB \rangle. \tag{4}$$

- Por lo tanto la acción de Chern-Simons-Savvidy en cuatro dimensiones es dada por,

$$S(A, B) = \int_{\mathcal{M}^4} \langle FB \rangle, \tag{5}$$

la cual es invariante, modulo termino de borde, bajo las transformaciones $\delta F = [F, \xi_0]$ y $\delta B = D\xi_1 + [B, \xi_0]$.

Formas de transgresión en dimensiones pares

Consideremos las siguientes cantidades:

1. Dos 1-forma conexión A_1 y A_0 evaluadas sobre un álgebra de Lie, cuyas curvaturas son dadas por,

$$F_1 = dA_1 + A_1^2, \quad F_0 = dA_0 + A_0^2.$$

2. Dos 2-forma B_1 y B_0 también evaluadas sobre el álgebra de Lie con sus correspondientes "curvaturas",

$$H_1 = dB_1 + [A_1, B_1], \quad H_0 = dB_0 + [A_0, B_0].$$

3. Definimos

$$\Theta = A_1 - A_0, \quad \Phi = B_1 - B_0, \tag{6}$$

$$A_t = A_0 + t\Theta, \quad B_t = B_0 + t\Phi. \tag{7}$$

Formas de transgresión en dimensiones pares

Las correspondientes curvaturas

$$F_t = dA_t + A_t^2, \tag{8}$$

$$H_t = D_t B_t = dB_t + [A_t, B_t], \tag{9}$$

satisfacen las condiciones

$$\frac{d}{dt} F_t = D_t \Theta,$$

$$\frac{d}{dt} H_t = D_t \Phi + [\Theta, B_t] \, .$$

Teorema de Chern-Weil generalizado

Sea Γ_{2n+3} un invariante topológico en $2n+3$ dimensiones.

Sean A_1 y A_0 dos 1-formas conexiones de gauge y sean F_1 y F_0 sus correspondientes 2-formas curvaturas.

Sean además B_1 y B_0 dos 2-formas conexiones de gauge y sean H_1 y H_0 sus correspondientes 3-formas curvaturas.

Teorema de Chern-Weil generalizado

Entonces,

(*i*) Γ_{2n+3} es una forma cerrada, es decir $d\Gamma_{2n+3} = 0$

(*ii*)

$$\Gamma_1^{2n+3} - \Gamma_0^{2n+3} = \langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = d\mathcal{T}^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0),$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0) &= \int dt \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \cdots + F_t^{n-1}\Theta\right) H_t + F_t^n \Phi \right\rangle ,\end{aligned}$$

será llamada forma transgresión generalizada o forma transgresión de Savvidy.

Teorema de Chern-Weil generalizado

Prueba

(*i*) Es directa

(*ii*) Puesto que

$$\left\langle F_1^n H_1 \right\rangle - \left\langle F_0^n H_0 \right\rangle = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left\langle F_t^n H_t \right\rangle = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left\langle \frac{dF_t}{dt} F_t^{n-1} H_t \right.$$
$$\left. + F_t \frac{dF_t}{dt} F_t^{n-2} H_t + \cdots + F_t^{n-1} \frac{dF_t}{dt} H_t + F_t^n \frac{dH_t}{dt} \right\rangle ,$$

y dado que $\frac{dF_t}{dt} = D_t \Theta$ y $\frac{dH_t}{dt} = D_t \Phi + [\Theta, B_t]$, tenemos

$$\left\langle F_1^n H_1 \right\rangle - \left\langle F_0^n H_0 \right\rangle = \int_0^1 dt \left\langle D_t \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \right. \right.$$
$$\left. \left. \cdots + F_t^{n-1} \Theta \right) H_t + D_t \left(F_t^n \Phi \right) + F_t^n [\Theta, B_t] \right\rangle .$$

Utilizando

$$
\begin{aligned}
&\left\langle D_t \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1}\Theta\right) H_t \right\rangle \\
&= d \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1}\Theta\right) H_t \right\rangle \\
&+ \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1}\Theta\right) \left[F_t, B_t\right] \right\rangle ,
\end{aligned}
$$

se encuentra

$$
\begin{aligned}
&\left\langle F_1^n H_1 \right\rangle - \left\langle F_0^n H_0 \right\rangle \\
&= d \int_0^1 dt \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1}\Theta\right) H_t + F_t^n \Phi \right\rangle \\
&+ \int_0^1 dt \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1}\Theta\right) \left[F_t, B_t\right] + F_t^n \left[\Theta, B_t\right] \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Teorema de Chern-Weil generalizado

Usando la ciclicidad de la traza se encuentra

$$\langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = d \int_0^1 dt \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1} \Theta \right) H_t + F_t^n \Phi \right\rangle .$$

De donde vemos que podemos definir la $(2n+2)$-forma transgresión generalizada como

$$\mathcal{T}^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0) = \int_0^1 dt \left\langle \left(\Theta F_t^{n-1} + F_t \Theta F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1} \Theta \right) H_t + F_t^n \Phi \right\rangle .$$

Teorema de Chern-Weil generalizado

Si consideramos que $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $A_1 = A$, $B_1 = B$ tenemos que $A_t = tA$, $B_t = tB$ y que $\Theta = A$, $\Phi = B$, de modo que

$$\begin{aligned}\langle F^n H \rangle &= d \int_0^1 dt \left\langle \left(AF_t^{n-1} + F_t A F_t^{n-2} + \cdots + F_t^{n-1} A \right) H_t \right. \\ &\quad \left. + F_t^n B \right\rangle ,\end{aligned}$$

lo que conduce a definir la $(2n+2)$-forma

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{hss}^{2n+2}(A,B) &= \int_0^1 dt \left\langle \left(AF_t^{n-1} + F_t A F_t^{n-2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdots + F_t^{n-1} A \right) H_t + F_t^n B \right\rangle ,\end{aligned}$$

que coincide con la $(2n+2)$-forma Chern-Simons, encontrada por Savvidy y que hemos llamado forma de Chern-Simons-Saviddy.

Álgebras diferenciales libres y formas compuestas

- Álgebras de Lie $\longrightarrow$ Estudio de las teoría de gauge.
- Supergravedad en $D > 5$, Supercuerdas $\longleftrightarrow$ Campos tensoriales
- Pregunta: ¿Es posible extender el concepto de álgebra de Lie de manera que pueda acomodar formas de grado mayor que uno?
- Respuesta: Álgebra diferencial libre.

Ecuación de Maurer-Cartan

- $\{\omega^i\}$, $i = 1, 2, \cdots, \dim G^*$: base de 1-formas
- $d\omega^i$: 2-forma $\longrightarrow$ expansion en la base de 2-formas $\{\omega^i \wedge \omega^j\}$

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

  C^i_{jk} : constantes de estructura.
- $\{T_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, \dim G$: base de vectores,

$$[T_i, T_j] = C_{ij}{}^k T_k \quad \longrightarrow$$

dual de la ecuación de Maurer-Cartan.

- $d^2 = 0 \longrightarrow$ Identidad de Jacobi

$$dd\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} d\left(\omega^j \wedge \omega^k\right) \quad \Longrightarrow \quad C_{j[k}{}^i C_{lm]}{}^j = 0$$

Álgebras diferenciales libres (FDA)

- FDA $\longrightarrow$ Generalización del concepto de álgebra de Lie.

- $\left\{\Theta^{A(p)}\right\}$: Base de formas exteriores

- $d\Theta^{A(p)} \longrightarrow$ Expansion en la base $\left\{\Theta^{A(p)}\right\} \longrightarrow$ Ecuación de Maurer-Cartan-generalizada:

$$d\Theta^{A(p)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} C^{A(p)}_{B_1(p_1)\ldots B_n(p_n)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \ldots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0,$$

$C^{A(p)}_{B_1(p_1)\ldots B_n(p_n)}$: Constantes de estructuras generalizadas.
$N = p_{\max} + 1$, $p_{\max}$: Grado máximo en el conjunto $\left\{\Theta^{A(p)}\right\}$.

Álgebras diferenciales libres (FDA)

$$d^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Identidad de} \\ \text{Jacobi generalizada}\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$d^2\Theta^{A(p)} = -\sum_{n,m=1}^{N} C^{A(p)}_{B_1(p_1)..B_n(p_n)} C^{B_1(p_1)}_{D_1(q_1)..D_m(q_m)} \Theta^{D_1(q_1)} \wedge \cdots \wedge \Theta^{D_m(q_m)} \wedge \Theta^{B_2(p_2)} \wedge .. \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0 \tag{10}$$

Álgebra de Lie ordinaria puede ser reobtenida cuando todas las formas Θ tienen el grado $p = 1$.

Preguntas

(*i*) ¿Es un álgebra diferencial libre reducible a un grupo ordinario?

(*ii*) ¿Existe una base $T(M)$ compuesta de vectores tangentes $[T_i, T_j] = C_{ij}{}^{k} T_k$, tales que el valor que toma $\Theta^{A(p)}$ al actuar sobre p vectores tangentes T_a sea una constante?

$$\Theta^{A(p)}\left(T_{a_1}, \cdots, T_{a_p}\right) = \frac{1}{p} K^{A(p)}_{a_1 a_2 \cdots a_p}.$$

Formalimo de D'Auria-Fre

Si

$$\Theta^{A(p)}\left(T_{a_1},\cdots,T_{a_p}\right)=\frac{1}{p}K^{A(p)}_{a_1a_2\cdots a_p},$$

entonces

$$\Theta^{A(p)}=\frac{1}{p}K^{A(p)}_{a_1a_2\cdots a_p}\omega^{a_1}\wedge\omega^{a_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{a_p},$$

donde los $K^{A(p)}_{a_1a_2\cdots a_p}$ son constantes, donde las formas ω^a satisfacen

$$d\omega^a + \frac{1}{2} C_{bc}{}^a \omega^b \wedge \omega^c = 0.$$

Las constantes $K^{A(p)}_{a_1 a_2 \cdots a_p}$ y $C_{bc}{}^{a}$ deben satisfacer las siguientes condiciones

1. Las identidades de Jacobi para $C_{bc}{}^{a}$

$$dd\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}{}^a C_{fg}{}^{b} \omega^f \wedge \omega^g \wedge \omega^c = 0. \tag{11}$$

2. La equivalencia con las ecuaciones de Maurer Cartan generalizadas

$$d\Theta^{A(p)} = \frac{1}{p} K^{A(p)}_{a_1 a_2 \cdots a_p} d\left(\omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{a_p}\right)$$
$$d\Theta^{A(p)} = -\frac{1}{2} K^{A(p)}_{a_1 a_2 \cdots a_p} C_{bc}{}^{a_1} \omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^{a_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{a_p}.$$

Dado que $\Theta^{A(p)}$ satisface

$$d\Theta^{A(p)} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} C^{A(p)}{}_{B_1(p_1)\cdots B_n(p_n)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \cdots \wedge \Theta^{B_n(p_n)}, \tag{12}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\Theta^{B_1(p_1)} &= \frac{1}{p_1} K^{B_1(p_1)}{}_{b_1{}^1 b_2{}^1 \cdots b_{p_1}{}^1} \omega^{b_1{}^1} \wedge \omega^{b_2{}^1} \wedge \cdots \wedge \omega^{b_{p_1}{}^1}, \\
\Theta^{B_2(p_2)} &= \frac{1}{p_2} K^{B_2(p_2)}{}_{b_1{}^2 b_2{}^2 \cdots b_{p_2}{}^2} \omega^{b_1{}^2} \wedge \omega^{b_2{}^2} \wedge \cdots \wedge \omega^{b_{p_2}{}^2}, \\
&\vdots \\
\Theta^{B_n(p_n)} &= \frac{1}{p_n} K^{B_n(p_n)}{}_{b_1{}^n b_2{}^n \cdots b_{p_n}{}^n} \omega^{b_1{}^n} \wedge \omega^{b_2{}^n} \wedge \cdots \wedge \omega^{b_{p_n}{}^n}.
\end{aligned}$$

Cualquier solución de estas ecuaciones algebraicas en los coeficientes $C_{bc}{}^{a}$ y $K^{A(p)}_{a_1 a_2 \cdots a_p}$ conduce a interpretar la FDA como un grupo y reduce una teoría sobre una variedad FDA a una teoría sobre la variedad de un grupo ordinario.

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

Acción de Chern-Simons-Savvidy en $D = 4$:

$$S_{ChSS}(A, B) = \int_{\mathcal{M}^4} \langle FB \rangle .$$

Los generadores del álgebra de Maxwell satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac}, \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} .
\end{aligned} \tag{13}$$

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

Expandiendo A y B en el álgebra $\mathfrak{B}_4$ tenemos:

- Para A :

$$A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}, \tag{14}$$

$$F = \frac{1}{l} T^a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} F^{ab} Z_{ab}, \tag{15}$$

donde,

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a_{\ :b} e^b, \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_{\ :c} \omega^{cb}, \\ F^{ab} &= D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b. \end{aligned} \tag{16}$$

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

Si anulamos las curvaturas $T^a = R^{ab} = F^{ab} = 0$ se encuentran las ecuaciones de Maurer-Cartan para el álgebra de Maxwell

$$de^a + \omega^a{}_c e^c = 0, \tag{17}$$

$$d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb} = 0, \tag{18}$$

$$D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b = 0. \tag{19}$$

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

- Para B tenemos

$$B = B^a P_a + \frac{1}{2} B^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \beta^{ab} Z_{ab}, \tag{20}$$

donde B^a, B^{ab}, β^{ab} se deben determinar. La curvatura $H = DB = dB + [A, B]$ es dada por

$$H = H^a P_a + \frac{1}{2} H^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \Xi^{ab} Z_{ab},$$

donde,

$$\begin{aligned}
H^a &= D_\omega B^a - \frac{1}{l} B^a_b e^b, \\
H^{ab} &= D_\omega B^{ab}, \\
\Xi^{ab} &= D_\omega \beta^{ab} + k^a{}_c B^{cb} + k^b{}_c B^{cb} + \frac{1}{l} [e^a B^b - e^b B^a].
\end{aligned}$$

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

Si $H^a = H^{ab} = \Xi^{ab} = 0$, se tiene

$$D_\omega B^a - \frac{1}{l} B^a{}_b e^b = 0, \tag{21}$$

$$D_\omega B^{ab} = 0, \tag{22}$$

$$D_\omega \beta^{ab} + k^a{}_c B^{cb} + k^b{}_c B^{cb} + \frac{1}{l}\left[e^a B^b - e^b B^a\right] = 0. \tag{23}$$

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

- El conjunto de ecuaciones (17),(18),(19), (21),(22),(23) representan un álgebra diferencial libre para los campos $\{e^a, \omega^{ab}, k^{ab}, B^a, B^{ab}, \beta^{ab}\}$.
- Para expresar las 2-formas B^a, B^{ab}, β^{ab} como combinaciones de las 1-forma e^a, ω^{ab}, k^{ab} seguimos las Refs. R. D'Auria and P. Fre, Nucl. Phys. B 201 (1982) 101, y I. Bandos, J. de Azcarraga, M. Picon, O. Varela, Ann. Phys. 317 (2005) 238, y encontramos

$$B^a = \frac{a_1}{2l}\omega^a{}_b e^b + \frac{a_2}{2l}k^a{}_b e^b, \tag{24}$$

$$B^{ab} = \frac{b_1}{2l^2}e^a e^b + \frac{b_2}{2}\omega^a{}_c k^{cb} + \frac{b_3}{2}k^a{}_c k^{cb} + \frac{b_4}{2}\omega^a{}_c \omega^{cb}, \tag{25}$$

$$\beta^{ab} = \frac{c_1}{2l^2}e^a e^b + \frac{c_2}{2}\omega^a{}_c k^{cb} + \frac{c_3}{2}k^a{}_c k^{cb} + \frac{c_4}{2}\omega^a{}_c \omega^{cb}. \tag{26}$$

donde $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_4, c_1, \ldots c_4$ son constantes arbitrarias.

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

Introduciendo (24) y (25) en (21) y (22) encontramos

$$a_1 = b_4, \quad a_2 = -b_1, \quad b_2 = b_3 = 0. \tag{27}$$

Insertando este resultado en (24), (25) y (26) se encuentra,

$$c_2 = 2a_1, \quad c_3 = 2a_2. \tag{28}$$

De manera que los campos que satisfacen la FDA vienen dados por,

$$B^a = \frac{a_1}{2l}\omega^a{}_b e^b + \frac{a_2}{2l}k^a{}_b e^b, \tag{29}$$

$$B^{ab} = \frac{a_1}{2}\omega^a{}_c\omega^{cb} - \frac{a_2}{2l^2}e^a e^b, \tag{30}$$

$$\beta^{ab} = \frac{c_1}{2l^2}e^a e^b + \frac{a_1}{2}\omega^a{}_c k^{cb} + \frac{a_1}{2}\omega^b{}_c k^{ac} + \frac{a_2}{2}k^a{}_c k^{cb} + \frac{a_2}{2}k^b{}_c k^{ac} + \frac{c_4}{2}\omega^a{}_c\omega^{cb}. \tag{31}$$

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell

Ecuaciones (29),(30),(31)	$\longrightarrow$	Solución mas general que se puede construir a partir de los campos $\left\{e^a, \omega^{ab}, k^{ab}\right\}$
Cualquier elección de las constantes	$\longrightarrow$	Una solución para la FDA
Si $c_1 = a_1 + \gamma$ con γ constante podemos elegir $a_2 = c_4 = \gamma = 0$	$\longrightarrow$	Una solución dada por $B = \frac{a_1}{2}[A, A]$

Gravedad Chern-Simons en D=4

Usando los tensores invariantes encontrados en Ref. P. Salgado, S. Salgado, Phys. Lett B 728 (2014) 5.

$$\begin{aligned} \langle J_{ab} J_{cd} \rangle &= \alpha_0 l^2 \epsilon_{abcd}, \qquad (32) \\ \langle J_{ab} Z_{cd} \rangle &= \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd}, \qquad (33) \end{aligned}$$

con α_0 y α_2 constantes arbitrarias, se encuentra que la 4-forma Chern-Simons-Savvidy es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^4_{hss} = \frac{1}{4}\alpha_0 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} B^{cd} + \frac{1}{4}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \beta^{cd} + \frac{1}{4}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} k^{ab} D_\omega B^{cd} \\ + \frac{1}{8}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} B^{ab} D_\omega k^{cd} + \frac{1}{12}\alpha_2 \epsilon_{abcd} B^{ab} e^c e^d - \frac{1}{2} d\langle \omega B \rangle. \qquad (34) \end{aligned}$$

Utilizando (29),(30),(31) y (34), encontramos que el lagrangeano Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell toma la forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^4_{hss} &= \frac{1}{8}(-a_2\alpha_0 + \alpha_2 c_1)\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d + \frac{1}{8}(\alpha_0 a_1 + c_4\alpha_2)l^2\epsilon_{abcd}R^{ab}\omega^c{}_e\omega^{ed} \\
&+ \frac{a_2}{4}\alpha_2 l^2\epsilon_{abcd}R^{ab}k^c{}_e k^{ed} + \frac{a_1}{8}\alpha_2 l^2\epsilon_{abcd}R^{ab}\omega^c{}_e k^{ed} \\
&+ \frac{a_1}{8}l^2\alpha_2\epsilon_{abcd}R^{ab}\omega^d{}_e k^{ce} - \frac{a_2}{8}\alpha_2\epsilon_{abcd}k^{ab}D_\omega(e^c e^d) \\
&+ \frac{a_1}{8}l^2\alpha_2\epsilon_{abcd}k^{ab}D_\omega(\omega^c{}_e\omega^{ed}) - \frac{a_2}{16}\alpha_2\epsilon_{abcd}e^a e^b D_\omega k^{cd} \\
&+ \frac{a_1}{16}l^2\alpha_2\epsilon_{abcd}\omega^a{}_e\omega^{eb}e^c e^d - \frac{a_2}{24}\frac{\alpha_2}{l^2}\epsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d \\
&+ \frac{a_1}{24}\alpha_2\epsilon_{abcd}\omega^a{}_e\omega^{eb}e^c e^d - \frac{1}{4}d\left((c_1\alpha_2 - a_2\alpha_0)\epsilon_{abcd}\omega^{ab}e^c e^d\right. \\
&+ \frac{1}{2}(a_1\alpha_0 + c_4\alpha_2)l^2\epsilon_{abcd}\omega^{ab}\omega^c{}_e\omega^{ed} + \frac{a_2}{2}l^2\alpha_2\epsilon_{abcd}\left(\omega^{ab}k^c{}_e k^{ed}\right. \\
&\left.\left.+\omega^{ab}k^d{}_e k^{ce}\right) + \frac{a_1}{2}l^2\alpha_2\epsilon_{abcd}(\omega^{ab}\omega^c{}_e k^{ed} + \omega^{ab}\omega^d{}_e k^{ce})\right).
\end{aligned}
$$

De aquí podemos ver que si se cumple $\alpha_2 c_1 \neq \alpha_0 a_2$, entonces el lagrangeano Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell contiene el término de Einstein-Hilbert.

- Si $a_1 = a_2 = 0$ se encuentra

$$
\begin{aligned}
B^a &= 0, \\
B^{ab} &= 0, \\
\beta^{ab} &= \frac{c_1}{2l^2} e^a e^b + \frac{c_4}{2} \omega^a{}_c \omega^{cb},
\end{aligned}
$$

y el lagrangeano Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell toma siguiente forma

Gravedad Chern-Simons en D=4

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^4_{hss} &= \frac{1}{8}\alpha_2 c_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{1}{8} c_4 \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \omega^c{}_e \omega^{ed} \\ &- \frac{1}{4} d\left(c_1 \alpha_2 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d + \frac{c_4}{2}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} \omega^c{}_e \omega^{ed} \right),\end{aligned}$$

donde podemos ver que en el limite $l \longrightarrow 0$ se obtiene el lagrangeano de Einstein-Hilbert modulo un término de borde:

$$\mathcal{C}^4_{hss} = \frac{c_1}{8}\alpha_2 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d - \frac{c_1}{4}\alpha_2 d(\epsilon_{abcd}\omega^{ab} e^c e^d). \tag{35}$$

- Si $a_1 = c_1 = c_4 = 0$ entonces,

$$B^a = \frac{a_2}{2l} k^a_{\ b} e^b, \tag{36}$$

$$B^{ab} = -\frac{a_2}{2l^2} e^a e^b, \tag{37}$$

$$\beta^{ab} = \frac{a_2}{2} k^a_{\ c} k^{cb} + \frac{a_2}{2} k^b_{\ c} k^{ac}, \tag{38}$$

y el lagrangeano de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell toma ahora la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^4_{hss} &= -\frac{a_2}{8}\alpha_0 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{a_2}{4}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k^c_{\ e} k^{ed} \\
&- \frac{a_2}{8}\alpha_2 \epsilon_{abcd} k^{ab} D_\omega (e^c e^d) - \frac{a_2}{16}\alpha_2 \epsilon_{abcd} e^a e^b D_\omega k^{cd} \\
&- \frac{a_2}{24}\frac{\alpha_2}{l^2} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d - \frac{1}{4} d \left(-a_2 \alpha_0 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d \right. \\
&\left. + \frac{a_2}{2} l^2 \alpha_2 \epsilon_{abcd} (\omega^{ab} k^c_{\ e} k^{ed} + \omega^{ab} k^d_{\ e} k^{ce}) \right).
\end{aligned}$$

De aqui vemos que si $k^{ab} = 0$ se obtiene el lagrangeano de Einstein-Hilbert con constante cosmológica:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^4_{hss} &= -\frac{a_2}{8}\alpha_0 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d - \frac{a_2}{24}\frac{\alpha_2}{l^2}\epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d \\ &\quad + \frac{1}{4} d\left(a_2 \alpha_0 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d\right). \end{aligned}$$

¡Gracias!