

Ecuación de estado generalizada y universo tipo bouncing

Felipe Contreras¹ Norman Cruz² y Esteban González²

¹ Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación,
Universidad de Santiago de Chile

² Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile

26 de marzo de 2015

Índice

Introducción

Solución numérica

Resultados numéricos

Solución analítica universo bouncing

Composición del universo bouncing

Conclusiones

Referencias

Introducción

El estudio de ecuaciones de estado generalizadas (EoS) para la componente principal de fluido del universo tiene ya un largo tiempo. Barrow [1] Supuso que el tensor de materia posee una presión P y una densidad ρ de la forma

$$P(\rho) = -\rho - \gamma\rho^\lambda, \quad (1)$$

donde γ y λ son constantes con $\gamma \neq 0$. La EoS estándar de un fluido perfecto, $P = (\gamma - 1)\rho$ es recuperada cuando $\lambda = 1$. Una variación de la Eq.(1) es considerada por Mukherjee [2] de la forma

$$P(\rho) = A\rho - \gamma\rho^{1/2}, \quad (2)$$

Para ambas ecuaciones de estado se obtienen universos emergentes dados por el factor de escala

$$a(t) = a_0(\beta + e^{\alpha t})^\omega, \quad (3)$$

donde a_0 y β son constantes y α , ω son dados en términos de los parámetros A , γ .

Es importante destacar que estas soluciones son encontradas para un universo plano ($k = 0$).

La ecuación de estado indicada en la Eq.(2) nos conduce a soluciones de universos tipo bouncing al considerar curvatura positiva en las ecuaciones de Friedmann.

Solución numérica

Consideremos la ecuación de estado indicada en la Eq.(2), la ecuación de Friedmann para un espacio con curvatura positiva y constante cosmológica igual a cero ($\Lambda = 0$) y la ecuación del fluido

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3}{a^2}, \quad (4)$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0. \quad (5)$$

Es fácil encontrar que reemplazando la Eq.(4) en la Eq.(5) se obtiene que

$$P = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{a^2}. \quad (6)$$

Ahora, reemplazando la Eq.(4) en la Eq.(2) y esta expresión la igualamos con la Eq.(6) se tiene la ecuación diferencial

$$\ddot{a} = \frac{\gamma 3^{1/2}}{2} (\dot{a}^2 + 1)^{1/2} - \frac{(3A + 1)}{2} \frac{(\dot{a}^2 + 1)}{a} \quad (7)$$

para resolver la ecuación diferencial anterior es necesario reducirla a ecuaciones diferenciales de primer orden. Para esto consideremos que $\ddot{a} = \frac{d}{dt} \frac{da}{dt}$ y la sustitución $u = \frac{da}{dt} = \dot{a}$, lo que entrega:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\gamma 3^{1/2}}{2} (u^2 + 1)^{1/2} - \frac{(3A + 1)}{2} \frac{(u^2 + 1)}{a} \quad (8)$$

$$\frac{da}{dt} = u \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) forman un sistema de ecuaciones diferenciales que es posible resolver mediante el método de Runge-Kutta 4, considerando para la iniciación del algoritmo dos puntos iniciales que son a_0 y u_0 .

Resultados numéricos

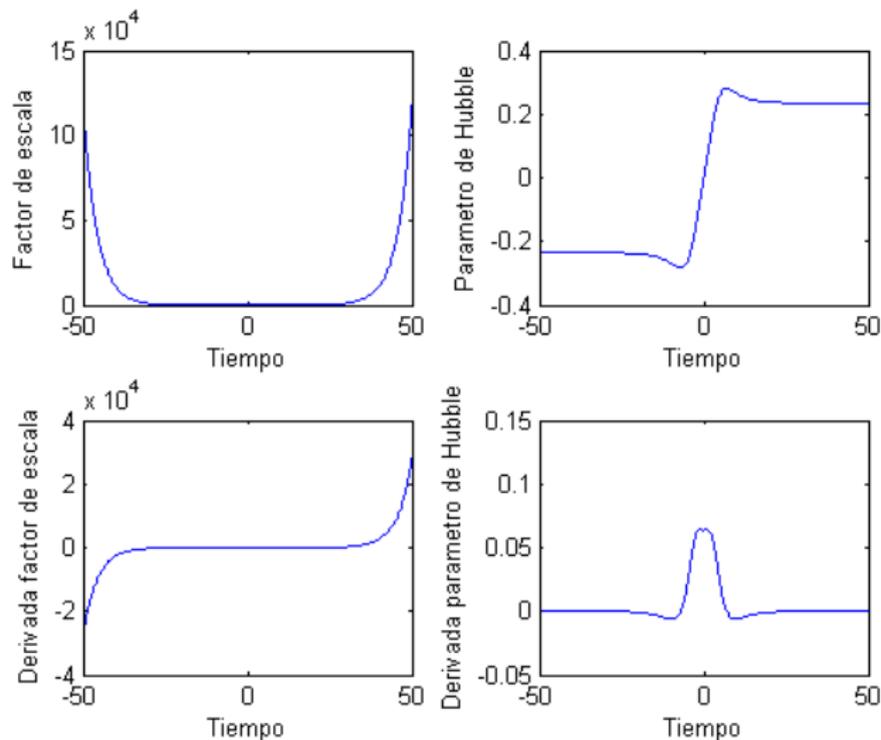


Figura: Resultado numérico considerando $a_0 = 1$, $u_0 = 0$, $A = -\frac{1}{3} + 0,15$ y $\gamma = \frac{1}{3}$.

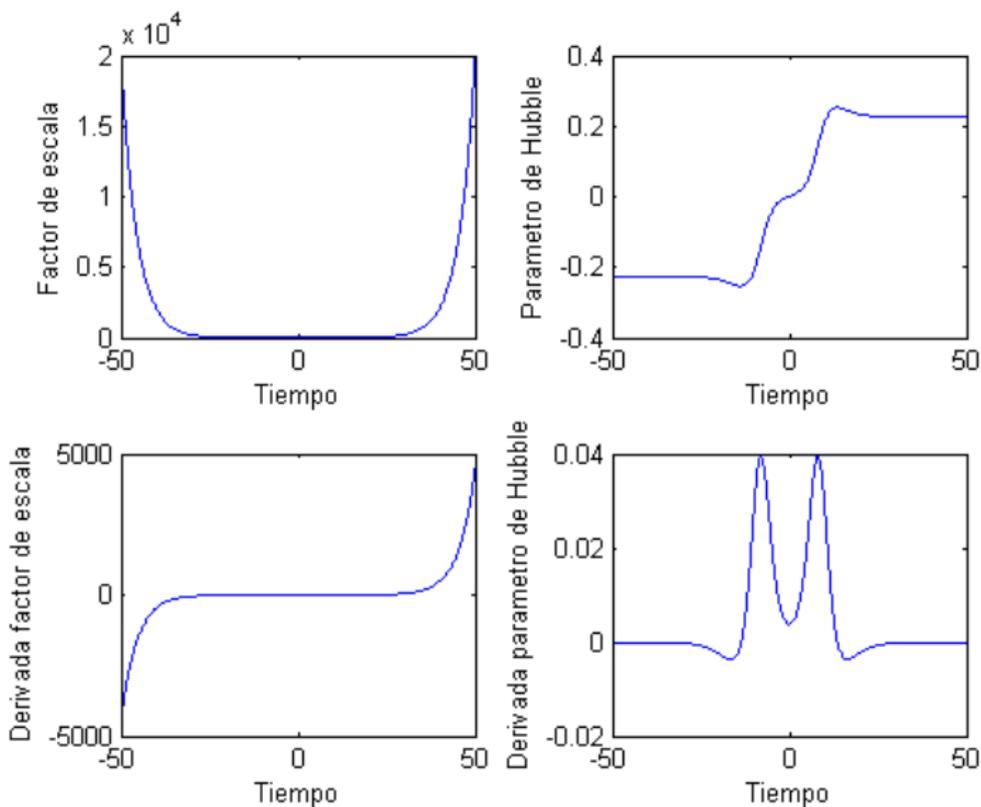


Figura: Resultado numérico considerando $a_0 = 1$, $u_0 = 0$, $A = -\frac{1}{3} + 0,19$ y $\gamma = \frac{1}{3}$.

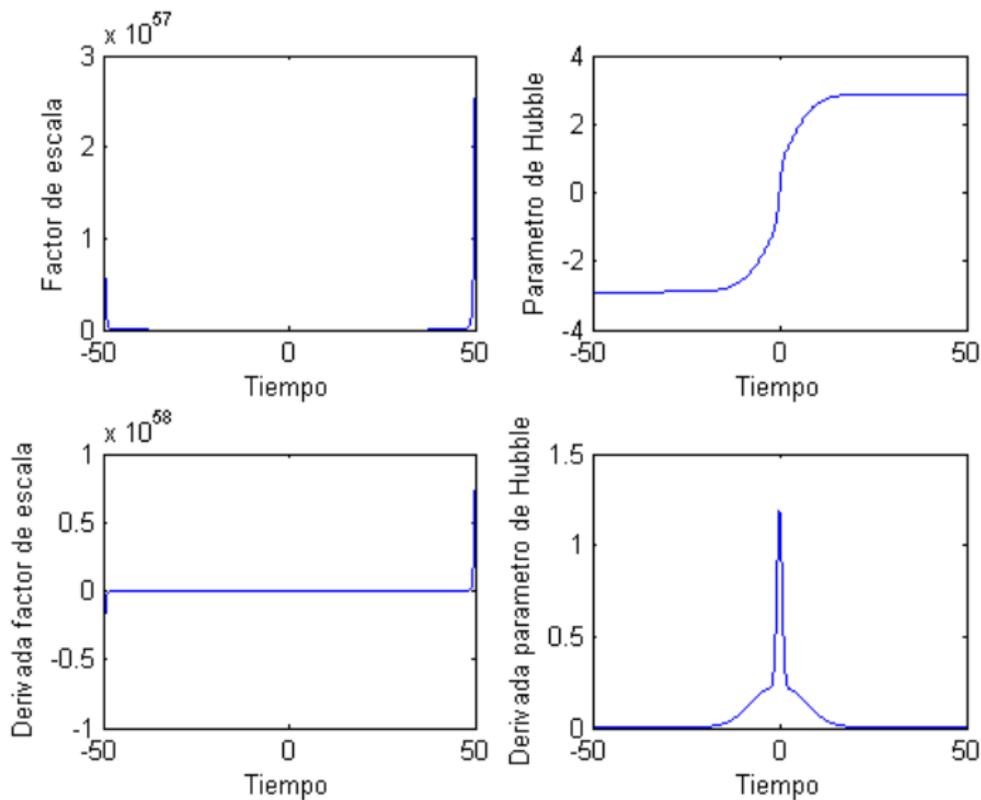


Figura: Resultado numérico considerando $a_0 = 1$, $u_0 = 0$, $A = -\frac{1}{3} - 0,6$ y $\gamma = \frac{1}{3}$.

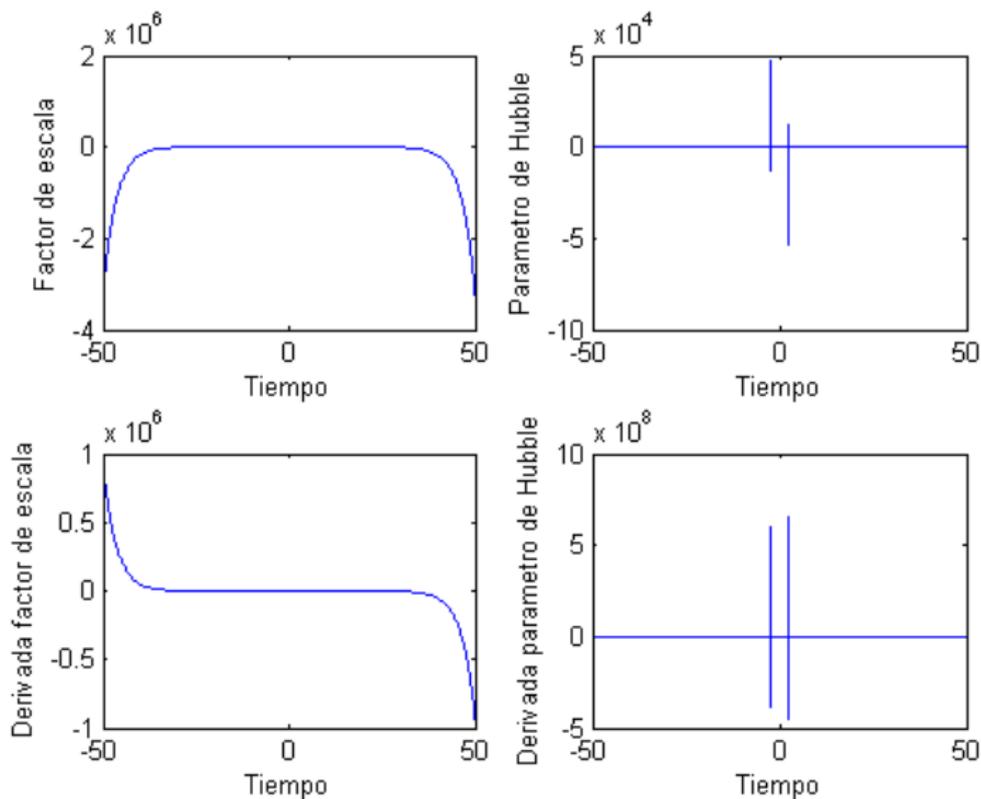


Figura: Resultado numérico considerando $a_0 = 1$, $u_0 = 0$, $A = -\frac{1}{3}$ y $\gamma = -\frac{1}{3}$.

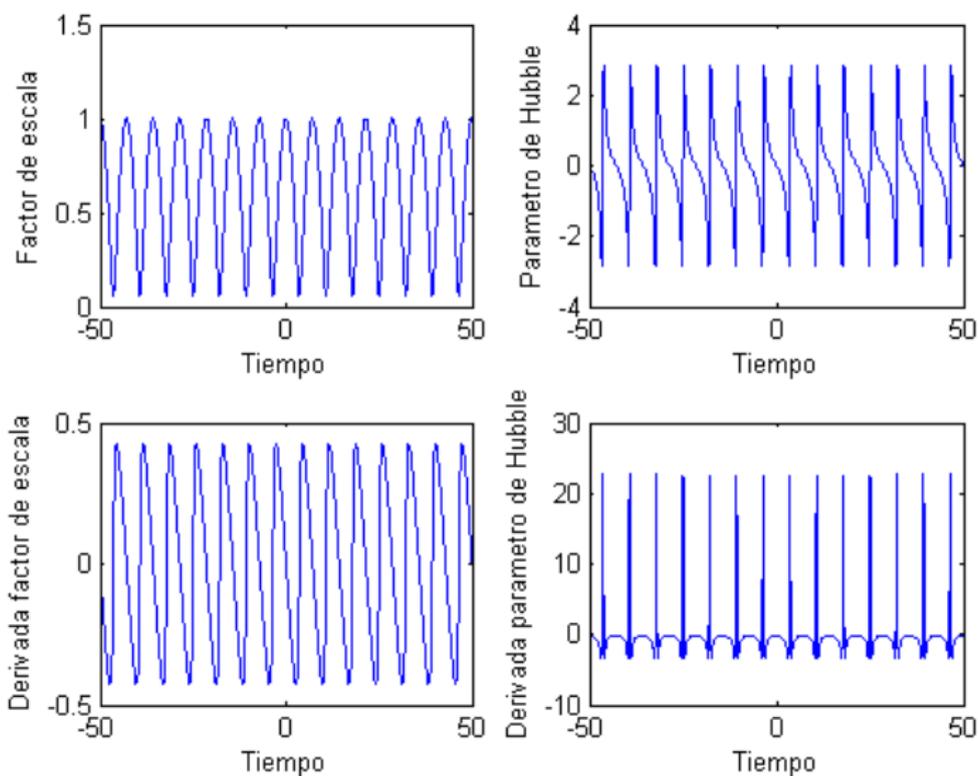


Figura: Resultado numérico considerando $a_0 = 1$, $u_0 = 0$, $A = -\frac{1}{3} - 0,06$ y $\gamma = -\frac{1}{3}$.

Solución analítica universo bouncing

Es posible encontrar una solución analítica a la ecuación diferencial dada por la Eq.(7), tomando $A = -1/3$, la cual nos entrega el factor de escala dado por la expresión

$$a(t) = \frac{2}{\gamma\sqrt{3}} \cosh\left(\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}t + \alpha\right) + \beta, \quad (10)$$

donde α y β son constantes de integración. El parámetro de Hubble esta dado por

$$H(x) = \frac{\sinh(x)}{\frac{2}{\gamma\sqrt{3}} \cosh(x) + \beta}, \quad (11)$$

donde se a considerado la sustitución $x = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}t + \alpha$.

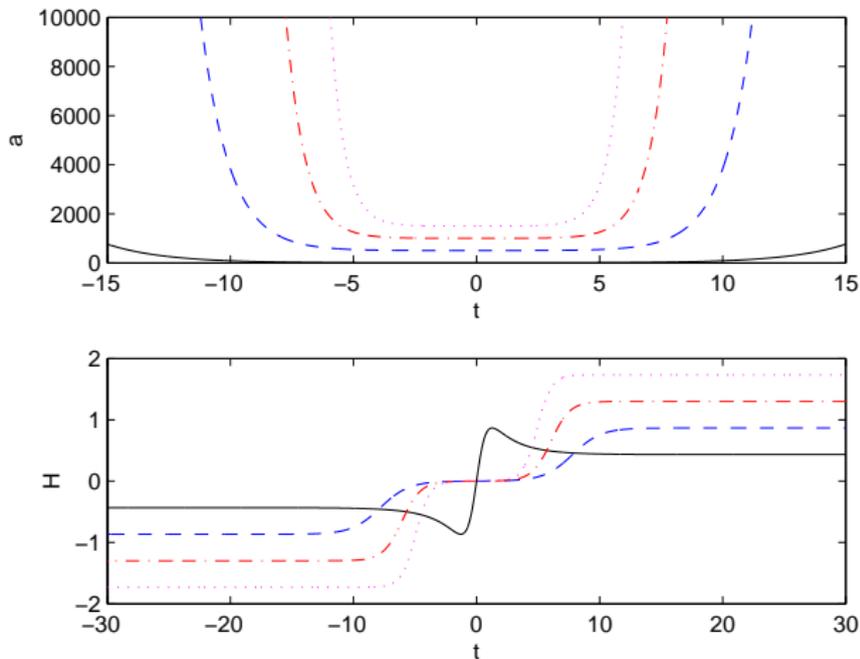


Figura: Gráfico del factor de escala (arriba) y el parámetro de Hubble (abajo) como función del tiempo para el universo tipo bouncing con $\alpha = 0$. La línea negra es para $\gamma = 0,5$ y $\beta = -2$, La línea azul para $\gamma = 1,0$ y $\beta = 500$, La línea roja para $\gamma = 1,5$ y $\beta = 1000$ y la línea magenta para $\gamma = 2,0$ y $\beta = 1500$.

Composición del universo bouncing

Para obtener la densidad de energía asociada a este universo, debemos reemplazar la EoS utilizada $P = -\frac{1}{3}\rho - \gamma\rho^{1/2}$ en la ecuación del fluido indicada por la Eq.(5) y resolver la respectiva ecuación diferencial, obteniéndose

$$\rho(a) = \left(\frac{3\gamma}{2} + \frac{\delta}{2a} \right)^2, \quad (12)$$

donde delta esta relacionada con β y γ de la forma $\delta = -3\gamma\beta$.

Por otro lado, para obtener la presión, basta con reemplazar la Eq.(12) en la EoS considerada anteriormente

$$P(a) = -\frac{1}{3} \left(\frac{3\gamma}{2} + \frac{\delta}{2a} \right)^2 - \gamma \left(\frac{3\gamma}{2} + \frac{\delta}{2a} \right). \quad (13)$$

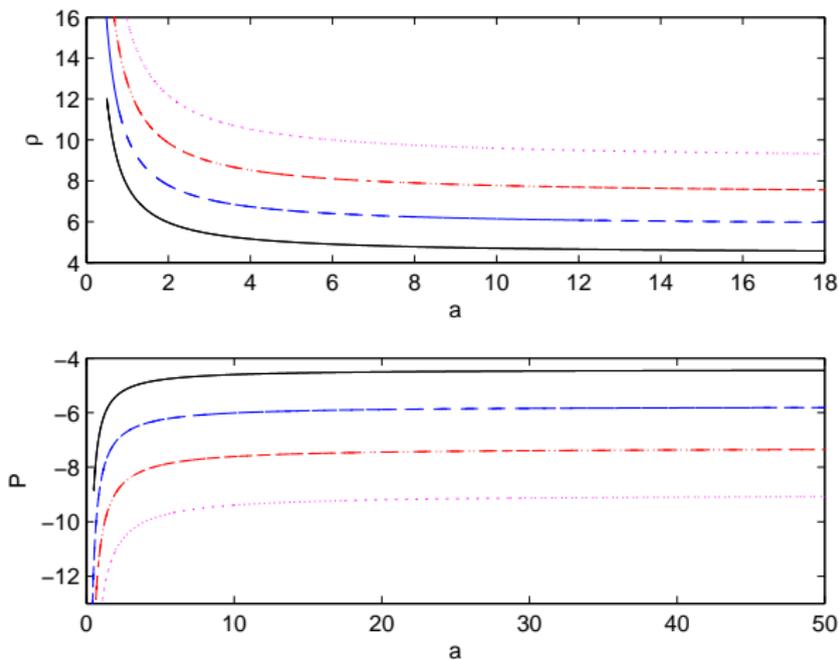


Figura: Gráfico de densidad de energía (arriba) y presión (abajo) como función del factor de escala para el universo tipo bouncing con $\alpha = 0$ y $\beta = -0,33$. La línea negra es para $\gamma = 1,4$, la línea azul para $\gamma = 1,6$, la línea roja para $\gamma = 1,8$ y la línea magenta para $\gamma = 2,0$.

Si expandimos los términos de las Eq.(12) y Eq.(13), se tiene que

$$\rho(a) = \frac{9\gamma^2}{4} + \frac{3\gamma\delta}{2a} + \frac{\delta^2}{4a^2} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad (14)$$

$$P(a) = -\frac{9\gamma^2}{4} - \frac{\gamma\delta}{a} - \frac{\delta^2}{12a^2} = P_1 + P_2 + P_3. \quad (15)$$

Comparando cada termino de la expansión, el fluido puede ser visto como as la suma de tres fluidos con la EoS dada por $\omega_1 = P_1/\rho_1 = -1$, $\omega_2 = P_2/\rho_2 = -2/3$ y $\omega_3 = P_3/\rho_3 = -1/3$, respectivamente.

En este caso la EoS utilizada para obtener el universo bouncing tiene un parámetro $\omega = P/\rho$ dado por

$$\omega = -\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{\rho^{1/2}}. \quad (16)$$

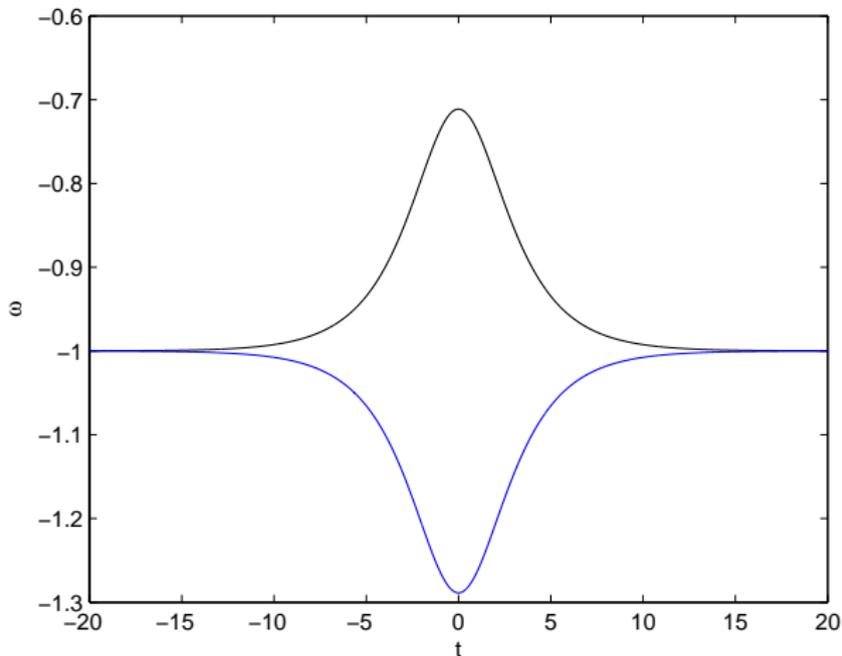


Figura: Gráfico del parámetro ω como función del tiempo para el universo tipo bouncing con $\gamma = 0,5$ y $\alpha = 0$ como función del tiempo. La línea negra es para $\beta = -1$ y la línea azul para $\beta = 1$.

Conclusiones

- ▶ Observamos que la ecuación de estado indicada en la Eq.(2) nos permite encontrar soluciones de universos no singulares que no son solo emergentes si no que al agregar curvatura nos da una familia de universos tipo bouncing.
- ▶ La densidad de energía y la presión que componen este universo puede ser escrita como la suma de tres fluidos diferentes que son constante cosmológica, quinta esencia y un fluido correspondiente a la curvatura.
- ▶ Para $\beta = -1$ como condición inicial, se observa que el parámetro ω de la EoS que da origen a este universo se comporta como constante cosmológica en $t \rightarrow +\infty, -\infty$ y como quinta esencia en el lapso asociado al bouncing.
- ▶ Para $\beta = 0$ como condición inicial tanto la presión como la densidad de energía son constantes y corresponden a un parámetro ω que es constante cosmológica.

Referencias

-  J. D. Barrow, Phys. Lett. B **235**, 40 (1990).
-  S. Mukherjee, B. C. Paul, N. K. Dadhich, S. D. Maharaj and A. Beesham A., Class. Quantum Grav. **23** 6927-6933 (2006).