Aspectos geométricos del método de S-expansión de álgebras de Lie.

M. Calderon[2] , R. Caroca[1] , Diego Molina[2] y P. Salgado[2] .

[1]Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Alonso de Rivera 2850, Concepción, Chile

[2]Departamento de Física, Universidad de Concepción, Casilla 160-C,

Concepción, Chile.

rcaroca@ucsc.cl

Índice

- *Introducción al método de la S-expansión.*
- *Aspectos geométricos del método de la S-expansión.*
- Semisimplicidad y no semisimplicidad .
- Un álgebra de Lie obtenida por S-expansión no es un álgebra simple (SO(4) a partir de SO(3)).

Expandiendo la métrica de Killing-Cartan de un álgebra de Lie, se obtuvo otras álgebras de Lie. El procedimiento de la S-expansión afecta a la geometría de un grupo de Lie, cambiando las magnitudes de los vectores y los ángulos entre ellos. Mediante ejemplos, se muestra que un álgebra de Lie obtenida por S-expansión no es un álgebra simple (SO(4) a partir de SO(3)).

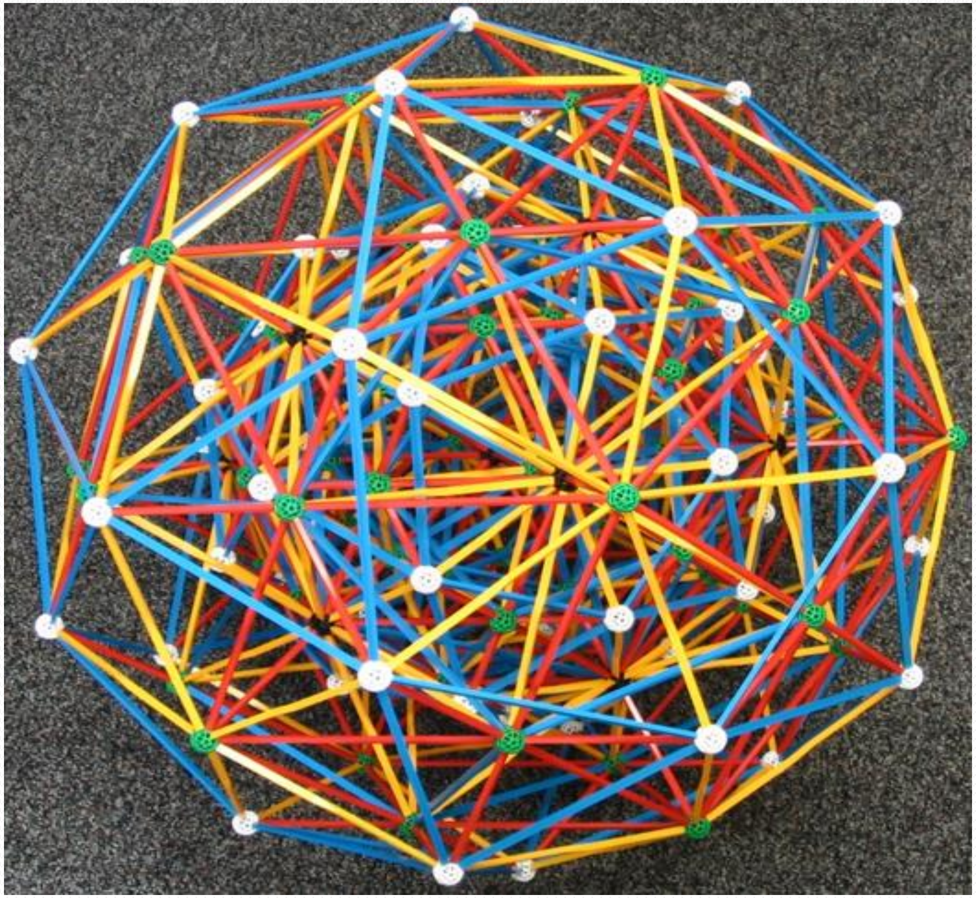
En física son de gran importancia:

- Los principios de invariancia y las leyes de conservación (las simetrías).
- La construcción de acciones invariantes bajo ciertas álgebras de Lie (grupo de Lie).
- La construcción de nuevas álgebras de Lie a partir de otras álgebras de Lie.

E8 is perhaps the most beautiful structure in all of mathematics, but it's very complex.
“ Hermann Nicolai ”.

The beauty of E8. Raíces simples de E8

(orden=248 generadores)



$$C_{AB}^{C}$$

$$\left[T_A, T_B\right] = C_{AB}^{C} T_C$$

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E_8$$

Tres de las cuatro fuerzas fundamentales se han podido unificar en un modelo teórico, denominado modelo estándar de las interacciones fundamentales de la naturaleza.

Su estructura matemática esta basado en el producto directo de tres grupos de Lie, y es una teoría de gauge con rompimiento espontáneo de simetría.

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\text{Rompimiento de simetría}} U(1)_Q$$

donde SU(3), SU(2) y U(1) son grupos de Lie.

El método de S-expansión

Introducción: El método de S-expansión permite obtener nuevas álgebras de Lie a partir de otra conocida. En el presente trabajo se estudia el método de S-expansión desde un punto de vista geométrico, para poder aplicarlo a las teorías físicas actuales, p.e., super álgebras de Lie, supergravedad, etc.

Aumenta la dimensionalidad del álgebra.

Referencias

[1] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, Expanding Lie (Super)Algebras through Abelian Semigroups.. Jour. Math. Phys. 47 (2006) 123512. arXiv: hep-th/0606215.

[2] F. Izaurieta, A. Pérez, E. Rodríguez and P. Salgado, Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure, J. Math. Phys. 50 (2009) 073511. [arXiV:0903.4712 [hep-th]].

[3] R. Caroca, N. Merino, P. Salgado, S expansion of higher-order Lie algebras, J. Math. Phys. 50 (2009) 013503.

[4] R. Caroca, N. Merino, P. Salgado, Generating higher-order Lie algebras by expanding Maurer–Cartan forms, J. Math. Phys. 50 (2009) 123527.

[5] R. Caroca, N. Merino, P. Salgado, O. Valdivia, "Generating infinite-dimensional algebras from loop algebras by expanding Maurer-Cartan forms, J. Math. Phys. 52, (2011)043519.

[6] R. Caroca, I. Kondrashuk, N. Merino and F. Nadal, Bianchi spaces and its 3-dimensional isometries as S-expansions of 2-dimensional isometries, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical; arXiv:1104.3541v2 [math-ph].

El método de *S-expansión*

Sea $S = \left\{ \lambda_{\alpha} \right\}_{\alpha=0}^{N}$ un semigrupo abeliano finito equipado con una ley de composición asociativa y conmutativa $S \times S \rightarrow S$

$$\left(\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta} \right) \rightarrow \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} = K_{\alpha\beta}^{\gamma} \lambda_{\gamma} \qquad (1)$$

Sea el par ($\mathcal{G}$; [;]), *un álgebra de Lie donde* $\mathcal{G}$ *es un espacio vectorial de dimensión finita* con base,

$$\left\{ T_{A} \right\}_{A=1}^{\dim G}$$

sobre el campo K, y [;], *es una regla de composición* $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$,

$$\left(T_{A}, T_{B} \right) \rightarrow \left[T_{A}, T_{B} \right] = C_{AB}^{C} T_{C} \qquad (2)$$

El método de *S-expansión*

El método de S-expansión es definido como el producto cartesiano $\mathcal{B}=S\times\mathcal{G}$

$$\mathrm{B}=\mathrm{SxG}=\left\{ \quad T_{(A,\alpha)}=\lambda_\alpha T_A : \lambda_\alpha \in S, T_A \in \mathrm{G} \quad \right\} \qquad (3)$$

equipado con una ley de composición [;]: $\mathcal{B}$ x $\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}$ *definida por*

$$\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right]=\lambda_\alpha\lambda_\beta\left[T_A, T_B\right]=K_{\alpha\beta}^{\gamma}C_{AB}^{C}\lambda_\gamma T_C$$

$$\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right]=C_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)}T_{(C,\gamma)} \quad , \qquad (4)$$

donde $C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)}=K_{\alpha\beta}^{\gamma}C_{AB}^{C}$ son las constantes de estructuras

que satisfacen la condición de Jacobi.

La ecuación anterior define el corchete de Lie del álgebra de Lie S-expandida, donde $\left\{T_{(A,\alpha)}\right\}$

es un base de $\mathcal{B}$.

Desde las álgebras de Lie S-expandidas podemos obtener:

1. Las subálgebras resonantes y reducidas, cuando se exige una cierta estructura al álgebra original $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$.

2. El álgebra M a partir de la S-expansión del álgebra Osp(32/1) usando el semigrupo particular $S = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ [1].

3. Usando otro semigrupo $S = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ se puede obtener el álgebra al "estilo" de D ´Auria-Fre partiendo desde el álgebra Osp(32/1).

4. Recently in [2], the S -expansion method was generalized to obtain higher-order expanded Lie algebras.

[1] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, Expanding Lie (Super)Algebras through Abelian Semigroups. Jour. Math. Phys. 47 (2006) 123512. arXiv:
hep-th/0606215.

[2] R. Caroca, N. Merino, P. Salgado, "S-expansion of higher-order Lie alge-bras", J. Math. Phys. 50 (2009) 013503.

[6] F. Izaurieta, A. Pérez, E. Rodriguez and P. Salgado, " Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure", J. Math. Phys. 50 (2009) 073511.
[arXiV: 0903.4712v1 [hep-th]] :

[7] R. Caroca, N. Merino, P. Salgado, Generating higher-order Lie algebras by expanding Maurer.Cartan forms, J. Math. Phys. 50 (2009) 123527.

Interpetacion geométrica de la S-expansión. Marco teórico.

- Producto interno de un álgebra de Lie: El producto de Killing-Cartan entre generadores (o combinaciones lineales) da como resultado una forma cuadrática y bilineal que describe la geometría intrínseca.

El producto interno de Killing-Cartan o forma de Killing-Cartan.

$$\left(X_i, X_j\right) = \mathrm{tr}\left(R\left(X_i\right)R\left(X_j\right)\right) = \sum_{r,s} R\left(X_i\right)_{rs} R\left(X_j\right)_{sr} \qquad (5)$$

$$\left(X_i, X_j\right) = \sum_{r,s} C_{irs} C_{jsr} = g_{ij}$$

los elementos matriciales de X_i son definidos por

$$\left(X_i\right)_{\alpha\beta} = C_{i\alpha\beta}$$

El producto interno de Killing-Cartan es invariante bajo la acción de un grupo de automorfismos.

Uso del carácter en la obtención de álgebras de Lie S-expandidas.

- El "carácter χ del álgebra", caracteriza en forma exclusiva a las distintas formas reales, inequivalentes y no isomorfas, asociadas a los grupos de Lie.

Geométricamente, el carácter "mide el grado de compacidad" de la variedad del grupo, dentro de un espectro acotado de valores enteros.

$$Caracter \quad \chi = \begin{pmatrix} número & de \\ generadores & no \\ compactos & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} número & de \\ generadores & \\ compactos & \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Cuando la métrica de K-C esta ortonormalizada el carácter coincide con la traza.

Otra característica esencial de un grupo de Lie, es el Rango.

La forma de Killing-Cartan:

- *Bajo el producto de Killing-Cartan, un álgebra de Lie tiene la descomposición,*

$$\mathcal{G} = V_0 \oplus V_+ \oplus V_- \qquad (11)$$

donde V_0 *: representa a una subálgebra invariante nilpotente, p.e., álgebra de Galileo, álgebra de euclides,* (el conjunto coseto de las traslaciones)..

V_+ *: subespacio de operadores no compactos.*

V_- *: subálgebra compacta.*

Carácter χ *del álgebra original (de partida):*

$$\chi = dim(V_+) - dim(V_-) \qquad (12)$$

$$\text{Si} \quad \dim(V_+) = \dim(V_-) \Rightarrow \quad \chi = 0.$$

Se obtuvo el producto de K-C de $\mathcal{B}=\mathcal{S}\times\mathcal{G}$

$$(X,X)_S = V^{(\alpha,a)}V^{(\beta,b)}K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\beta\delta}(X_a,X_b) \quad (13)$$

Podemos hacer uso del teorema espectral para diagonalizar la métrica.

$$\begin{aligned}(X,X)_S &= V^{(\alpha,a)}V^{(\beta,b)}K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\beta\delta}(X_a,X_b)\\ &\xrightarrow{diag.} \tilde{V}^{(\alpha,a)}\tilde{V}^{(\beta,b)}K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\beta\delta}(\tilde{X}_a,\tilde{X}_b)\end{aligned} \quad (14)$$

$$pero \quad (X_a,X_b)=0 \quad para \quad a\neq b$$

$$(X,X)_S \xrightarrow{diag.} V^{(\alpha,a)}V^{(\beta,a)}K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\beta\delta}(X_a,X_a) \quad (15)$$

La métrica expandida que resulta es diagonal en bloques, pero es diagonalizable, que en forma matricial se expresa

$$(X,X)_S = \tilde{V}^{T(\alpha,a)} \begin{pmatrix} \lambda_1 M_K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N M_K \end{pmatrix} \tilde{V}^{(\beta,a)} \qquad (16)$$

donde $\tilde{V}^{T(\alpha,a)}$ es un vector fila $1\times(P\cdot N)$ que representa a las coordenadas en el espacio $\mathcal{B}=S\ x\ \mathcal{G}$.

El $\tilde{V}^{(\beta,a)}$ es un vector columna $(P\cdot N)\times 1$. y

$$M_K = \sum_{\gamma,\delta}^{p} K_{\alpha\gamma}^{\delta} K_{\beta\delta}^{\gamma}$$

es una matriz cuadrada $P\times P$ que llamaremos "matriz M_K ", donde P es el orden del semigrupo.

A cada valor propio λ_i se le adosa una matriz M_K

$$
(X,X)_S = \tilde{V}^{T(\alpha,a)} \begin{pmatrix} \lambda_1 M_K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N M_K \end{pmatrix} \tilde{V}^{(\beta,a)} \qquad (16)
$$

Al diagonalizar la matriz

$$
{}_d(X,X)_S \to \begin{pmatrix} \lambda_1\bar{\lambda}_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \lambda_1\bar{\lambda}_P & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_N\bar{\lambda}_1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_N\bar{\lambda}_P \end{pmatrix}_{(P\cdot N)\times(P\cdot N)} \qquad (17)
$$

La S-expansión produce efectos sobre la signatura de la métrica:

$$sig(g)=\begin{pmatrix} \overbrace{+ \quad + \quad \cdots \quad +}^{l} & \overbrace{- \quad - \quad \cdots \quad -}^{m} \end{pmatrix}$$

Al diagonalizar la matriz

$$_d(X,X)_S=\begin{pmatrix} +\lambda_1\bar{\lambda}_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +\lambda_1\bar{\lambda}_P & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & & +\lambda_l\bar{\lambda}_P & & & & \\ & & & & & -\lambda_{l+1}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & 0 & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & -\lambda_{l+1}\bar{\lambda}_P & \\ & & & & & & & \ddots & -\lambda_{l+m}\bar{\lambda}_P \end{pmatrix}_{(P\cdot N)\times(P\cdot N)} \qquad (18)$$

$$ {}_{d}\left(g_{AB}\right)_{S} = \begin{pmatrix} {}_{d}\left(g_{AB}\right)_{\Gamma} & 0 \\ 0 & {}_{d}\left(g_{AB}\right)_{\Delta} \end{pmatrix} \quad (19) $$

$$ {}_{d}\left(\mathrm{g}_{\mathrm{AB}}\right)_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda_{1d}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\right) & & & & & & \\ & \lambda_{2d}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\right) & & & & & \\ & & \ddots & & & 0 & \\ & & & \lambda_{id}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\right) & & & \\ & 0 & & & \lambda_{(i+1)d}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\right) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{ld}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\right) \end{pmatrix}_{(l\cdot P)(l\cdot P)} \quad (20) $$

Diagonalización avalada en la Ley de Inercia de Silvester.

$$
{}_{d}\left(g_{AB}\right)_{\Delta}=\begin{pmatrix}
-\lambda_{(l+1)d}\left(M_K\right) & & & & & & \\
& -\lambda_{(l+2)d}\left(M_K\right) & & & & 0 & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & -\lambda_{(l+i)d}\left(M_K\right) & & & \\
& 0 & & & -\lambda_{(l+i+1)d}\left(M_K\right) & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & -\lambda_{(l+m)d}\left(M_K\right)
\end{pmatrix}_{(m\cdot P)\times(m\cdot P)} \quad (21)
$$

Considerando que existen Q valores propios negativos de los P valores propios en la matriz M

$$
{}_{d}\left(\mathrm{M_K}\right)=\begin{pmatrix}
-\bar{\lambda}_1 & & & & & & \\
& -\bar{\lambda}_2 & & & & & \\
& & \ddots & & & 0 & \\
& & & -\bar{\lambda}_Q & & & \\
& 0 & & & +\bar{\lambda}_{Q+1} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & +\bar{\lambda}_P
\end{pmatrix}_{\mathrm{P\times P}} \quad (22)
$$

$$\mathrm{N}^{\Gamma}_{++} = (P-Q)\cdot l, \quad \mathrm{N}^{\Gamma}_{--} = 0, \quad \mathrm{N}^{\Gamma}_{+-} = l\cdot Q, \quad \mathrm{N}^{\Gamma}_{-+} = 0 \quad (23)$$

$$\mathrm{N}^{\Delta}_{+-} = 0, \quad \mathrm{N}^{\Delta}_{-+} = m\cdot Q, \quad \mathrm{N}^{\Delta}_{++} = 0, \quad \mathrm{N}^{\Delta}_{--} = m\cdot(P-Q) \quad (24)$$

$$ran(V_+)_S = N^{\Gamma}_{++} + N^{\Gamma}_{-+} + N^{\Delta}_{-+} + N^{\Delta}_{++} \qquad (25)$$

$$ran(V_-)_S = N^{\Gamma}_{--} + N^{\Gamma}_{+-} + N^{\Delta}_{+-} + N^{\Delta}_{--} \qquad (26)$$

Denotando por H a la cantidad de autovalores nulos en la matriz M_K obtenemos finalmente que, el carácter del álgebra S-expandida:

$$\chi_S = (P - H - 2Q)\chi \quad (27)$$

No pueden ser los casos:

$$(\pm)\chi \rightarrow (\mp)\chi_S \quad , \mathrm{H} \leq \mathrm{P}$$

$$\mathbf{Si} \quad \chi \neq 0 \rightarrow \chi_S = 0, \quad , \mathrm{H} \leq \mathrm{P}$$

Se establece el sistema de ecuaciones

$$\mathrm{Ran}\left(V_0\right)_S = \mathrm{ran}\left(V_0\right)P + (\mathrm{ran}V_+ - \mathrm{ran}V_-)Q \quad \mathbf{(30c)}$$

$$\mathrm{Ran}\left(V_+\right)_S = \mathrm{ran}\left(V_+\right)\left(P - H - Q\right) + \mathrm{ran}(V_-)Q \quad (30a)$$

$$\mathrm{Ran}\left(V_-\right)_S = \mathrm{ran}\left(V_-\right)\left(P - H - Q\right) + \mathrm{ran}(V_+)Q \quad (30b)$$

Con ayuda de un programa iterativo, se encontró algunas de las posibles S-expansiones, usando un sistema de ecuaciones que involucra los rangos y las dimensionalidades, para ciertos valores de los parámetros P, H y Q.

Por S-expansión:

$$desde \quad SO(n) \rightarrow SO(n+l) \quad (28)$$

$$so(n) \longrightarrow so(n+l)$$

$so\,(n)$	$so\,(n+l)$	P	H	Q
3	4	2	0	0
3	6	5	0	0
3	7	7	0	0
3	9	12	0	0
3	10	15	0	0
3	12	22	0	0
4	9	6	0	0
4	12	11	0	0
4	13	13	0	0
4	16	20	0	0
5	16	12	0	0
5	20	19	0	0
5	21	21	0	0
6	10	3	0	0
6	15	7	0	0
6	16	8	0	0

Características del término $K_{i\gamma}^{\delta} K_{j\delta}^{\gamma}$

Pero el selector $K_{i\gamma}^{\delta} \in \{0,1\}$, luego tenemos

$$\mathrm{K}_{\mathrm{i}\gamma}^{\delta} \mathrm{K}_{\mathrm{j}\delta}^{\gamma} \in \{0,1,\ldots,\mathrm{P}\}$$

donde $i, j \in \{1,\ldots,P\}$. Si fijamos los índices i=j=1

$$K_{1\gamma}^{\delta} K_{1\delta}^{\gamma} = K_{11}^{\delta} K_{1\delta}^{1} + K_{12}^{\delta} K_{1\delta}^{2} + \ldots + K_{1P}^{\delta} K_{1\delta}^{\mathrm{P}}$$

$$K_{1\gamma}^{\delta}K_{1\delta}^{\gamma}=K_{11}^{1}K_{11}^{1}+K_{11}^{2}K_{12}^{1}+\ldots+K_{11}^{P}K_{1P}^{1}$$

$$+K_{12}^{1}K_{11}^{2}+K_{12}^{2}K_{12}^{2}+\ldots+K_{12}^{P}K_{1P}^{2}$$

$$\ldots$$

$$+K_{1P}^{1}K_{11}^{P}+K_{1P}^{2}K_{12}^{P}+\ldots+K_{1P}^{P}K_{1P}^{P}$$

Si suponemos $K_{12}^{1}K_{11}^{2}\neq 0$ *y* $K_{12}^{2}K_{12}^{2}\neq 0$ *y* ... $K_{12}^{P}K_{1P}^{2}\neq 0$

como $K_{12}^{1}K_{11}^{2}\neq 0 \Rightarrow K_{12}^{1}\neq 0$ *y* $K_{11}^{2}\neq 0$

luego $K_{12}^{2}=K_{12}^{3}=\ldots=K_{12}^{P}=0$ *y* $K_{11}^{1}=K_{11}^{3}=\ldots=K_{11}^{P}=0$

$y \quad tenemos \quad la \quad tabla$

$\bullet$	λ_1	λ_2	$..$
λ_1	λ_2	λ_1	$..$
λ_2	λ_1	$..$	$..$
$\vdots$	$..$	$..$	$..$

Magnitud de los vectores

Una consecuencia de $K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta} \in \{0,1,\ldots,P\}$

Afecta la norma de los vectores bases

$$\left\|X_{\Phi}\right\| = \sqrt{\left(X_{\Phi}, X_{\Phi}\right)_{S}} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(R\left(X_{\Phi}\right)R\left(X_{\Phi}\right)\right)} = \sqrt{R\left(X_{\Phi}\right)^{\Theta}_{\Omega}R\left(X_{\Phi}\right)^{\Omega}_{\Theta}}$$

$$\left\|X_{\Phi}\right\| = \sqrt{\left(C_{\Phi}\right)^{\Theta}_{\Omega}\left(C_{\Phi}\right)^{\Omega}_{\Theta}} = \sqrt{\left(C_{(\alpha,A)}\right)^{(\delta,D)}_{(\gamma,C)}\left(C_{(\alpha,A)}\right)^{(\gamma,C)}_{(\delta,D)}} = \sqrt{K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta}C^{D}_{AC}C^{C}_{AD}}$$

$$\left\|X_{\Phi}\right\| = \sqrt{K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta}g_{AB}} = \sqrt{K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta}}\sqrt{g_{AB}} = \sqrt{K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta}}\left\|X_{\Phi}\right\|$$

$$\left\|X_{\Phi=(\alpha,A)}\right\| = \sqrt{K_{\alpha\gamma}^{\delta}K_{\alpha\delta}^{\gamma}}\left\|X_{A}\right\|$$

$$= \begin{cases} \sqrt{0\cdot g_{AA}} = \sqrt{0}\left\|X_{A}\right\| = g_{(\alpha,A)(\alpha,A)} \\ \sqrt{1\cdot g_{AA}} = \sqrt{1}\left\|X_{A}\right\| = g_{(\alpha,A)(\alpha,A)} \\ \vdots \\ \sqrt{P\cdot g_{AA}} = \sqrt{P}\left\|X_{A}\right\| = g_{(\alpha,A)(\alpha,A)} \end{cases}$$

$$\left\|X_{\Phi=(\alpha,A)}\right\| = \sqrt{K_{\alpha\gamma}^{\delta}K_{\alpha\delta}^{\gamma}}\left\|X_{A}\right\|$$

Y en el caso general

$$\left\|V\right\| = \sqrt{\left(v^{(\alpha,A)}\right)^2 g_{(\alpha,A)(\alpha,A)}}$$

$$\left\|V\right\| = v^{(\alpha,A)}\sqrt{K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta}}\left\|X_A\right\|$$

Re escalamiento de las componentes diagonales del tensor Métrico, mediante el factor

$$K^{\delta}_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{\alpha\delta}$$

Separación angular entre vectores

El procedimiento de S-expansión afecta a los ángulos entre vectores

$$\cos\theta_S = \frac{(X_\Phi, X_\Theta)_S}{\sqrt{(X_\Phi, X_\Phi)_S (X_\Theta, X_\Theta)_S}}$$

$$= \frac{tr((R(X_\Phi)R(X_\Theta))}{\sqrt{tr(R(X_\Phi)R(X_\Phi))tr(R(X_\Theta)R(X_\Theta))}}$$

$$\cos\theta_S = \frac{K_{\alpha\gamma}^{\delta} K_{\beta\delta}^{\gamma}}{\sqrt{K_{\alpha\gamma}^{\delta} K_{\alpha\delta}^{\gamma}}\sqrt{K_{\beta\gamma}^{\delta} K_{\beta\delta}^{\gamma}}} \cos\theta$$

$$\Delta \equiv \frac{K_{\alpha\gamma}^{\delta} K_{\beta\delta}^{\gamma}}{\sqrt{K_{\alpha\gamma}^{\delta} K_{\alpha\delta}^{\gamma}}\sqrt{K_{\beta\gamma}^{\delta} K_{\beta\delta}^{\gamma}}} = \left\{ \frac{[0,1,2,3,\ldots,P]_{i,j}}{\sqrt{[0,1,2,3,\ldots,P]_{i,i}\sqrt{[0,1,2,3,\ldots,P]_{j,j}}}} \right\} \in \Re^{+}$$

Los grupos de Lie semisimples son muy importantes en física.

Criterio de semisimplicidad de Cartan: Un álgebra de Lie es semisimple, si y solo si, el determinante de la métrica de Killing-Cartan es distinto de cero.
Un álgebra S-expandida será semisimple, si y solo si:

$$\det\left(X, X\right)_S \neq 0 \quad (31)$$

Base de Cartan-Weyl:

Un algebra de Lie semisimple puede ser expresada en la base de Cartan-Weyl. Si denotamos por E_α a los operadores de subida y bajada, donde α define el peso de cada operador y por H_i a los operadores neutros; entonces, usando la convención de índices repetidos, un álgebra de Lie semisimple puede ser expresada en la base [46,48]:

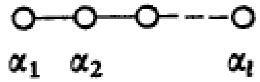
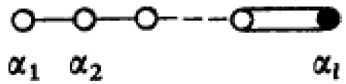
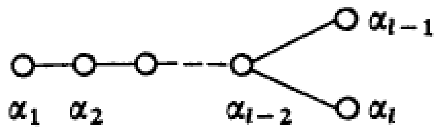
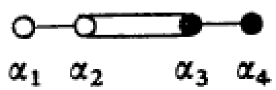
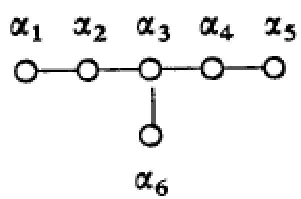
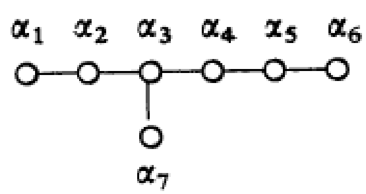
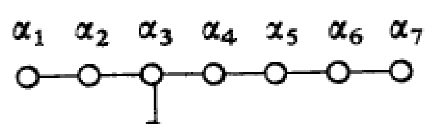
$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \quad , \quad \alpha \neq \beta \tag{1}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i \tag{2}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \tag{3}$$

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{4}$$

donde $N_{\alpha\beta}$ son constantes. Los generadores neutros $\{H_i\}$ constituyen una subálgebra denominada subálgebra de Cartan, donde $i = 1, 2, \ldots l$, y l representa al rango del álgebra de Lie semisimple.

Order	Cartan's Notation	Group	Dynkin Diagram	Solutions
$l(l+2)$	A_l	$SU(l+1)$		$e_i - e_j (i, j = 1, \ldots, l+1)$
$l(2l+1)$ $l \geq 2$	B_l	$SO(2l+1)$		$\pm e_i$ and $\pm e_i \pm e_j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$
$l(2l+1)$ $l \geq 3$	C_l	$Sp(2l)$		$\pm 2e_i$ and $\pm e_i \pm e_j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$
$l(2l-1)$ $l \geq 4$	D_l	$SO(2l)$		$\pm e_i \pm e_j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$
14	G_2	G_2		$e_i - e_j (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$ $\pm 2e_i \mp e_j \mp e_k (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k)$
52	F_4	F_4		As for B_4 plus the 16 solutions $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$
78	E_6	E_6		As for A_5 plus solutions $\pm \sqrt{2} e_7$ and $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm e_7/\sqrt{2}$ (an arbitrary choice of 3 " + " and 3 " − " signs for the terms in parentheses)
133	E_7	E_7		As for A_7 plus the solutions $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$ (an arbitrary choice of 4 " + " and 4 " − " signs for the terms in parentheses)
248	E_8	E_8		As for D_8 plus the solutions $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$ with an even number of plus signs.

- Si un álgebra no es semisimple, entonces el álgebra S-expandida no es semisimple.

- Si un álgebra es semisimple, entonces el álgebra S-expandida puede ser semisimple o no.

La preservación de la semisimplicidad, dependerá básicamente, de la matriz simetrica M_K .

Para el caso de un semigrupo de orden dos, S = $\{\lambda_1,\lambda_2\}$, se obtiene la matriz M_K

$$M_K = \begin{pmatrix} K_{1\alpha}^{\beta} K_{1\beta}^{\alpha} & K_{1\alpha}^{\beta} K_{2\beta}^{\alpha} \\ K_{2\alpha}^{\beta} K_{1\beta}^{\alpha} & K_{2\alpha}^{\beta} K_{2\beta}^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \qquad (32)$$

$$A = K_{1\alpha}^{\beta} K_{1\beta}^{\alpha}, \quad B = K_{1\alpha}^{\beta} K_{2\beta}^{\alpha} = K_{2\alpha}^{\beta} K_{1\beta}^{\alpha}, \quad C = K_{2\alpha}^{\beta} K_{2\beta}^{\alpha} \tag{33}$$

Para que el álgebra S-expandida sea semisimple, se debe cumplir que el $\det M_K = AC - B^2 \neq 0$, entonces evaluamos

$$AC = K_{11}^{1}K_{11}^{1}K_{21}^{2}K_{22}^{1} + K_{11}^{1}K_{11}^{1}K_{22}^{1}K_{21}^{2} + K_{11}^{1}K_{11}^{1}K_{22}^{2}K_{22}^{2} + K_{11}^{2}K_{12}^{1}K_{21}^{1}K_{21}^{1}$$
$$+ K_{11}^{2}K_{12}^{1}K_{22}^{1}K_{21}^{2} + K_{11}^{2}K_{12}^{1}K_{22}^{2}K_{22}^{2} + K_{12}^{1}K_{11}^{2}K_{21}^{1}K_{21}^{1} + K_{12}^{1}K_{11}^{2}K_{22}^{1}K_{21}^{2}$$
$$+ K_{12}^{1}K_{11}^{2}K_{22}^{2}K_{22}^{2} + K_{12}^{2}K_{12}^{2}K_{21}^{1}K_{21}^{1} + K_{12}^{2}K_{12}^{2}K_{21}^{2}K_{22}^{1} + K_{12}^{2}K_{12}^{2}K_{22}^{1}K_{21}^{2}.$$

$$B^2 = K_{11}^{1}K_{21}^{1}K_{11}^{2}K_{22}^{1} + K_{11}^{1}K_{21}^{1}K_{12}^{1}K_{21}^{2} + K_{11}^{1}K_{21}^{1}K_{12}^{2}K_{22}^{2} + K_{11}^{2}K_{22}^{1}K_{11}^{1}K_{21}^{1}$$
$$+ K_{11}^{2}K_{22}^{1}K_{11}^{2}K_{22}^{1} + K_{11}^{2}K_{22}^{1}K_{12}^{2}K_{22}^{2} + K_{12}^{1}K_{21}^{2}K_{11}^{1}K_{21}^{1} + K_{12}^{1}K_{21}^{2}K_{12}^{1}K_{21}^{2}$$
$$+ K_{12}^{1}K_{21}^{2}K_{12}^{2}K_{22}^{2} + K_{12}^{2}K_{22}^{2}K_{11}^{1}K_{21}^{1} + K_{12}^{2}K_{22}^{2}K_{11}^{2}K_{22}^{1} + K_{12}^{2}K_{22}^{2}K_{12}^{1}K_{21}^{2}.$$

Determinación del semigrupo de orden 2, $S=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ que preserva la semisimplicidad en la expansión.

1°. Primer caso: Si $K_{11}^{1}K_{11}^{1}K_{22}^{2}K_{22}^{2}\neq 0$

$$\mathrm{K}_{11}^{1}=1\Rightarrow\lambda_1\lambda_1=\mathrm{K}_{11}^{1}\lambda_1,\quad \mathrm{K}_{22}^{2}=1\Rightarrow\lambda_2\lambda_2=\lambda_2\overset{\text{Unicidad}}{\Rightarrow}\quad \mathrm{K}_{11}^{2}=0,\quad \mathrm{K}_{22}^{1}=0$$

Y tenemos dos casos:

1.1. $K_{12}^{2}=K_{21}^{2}=1,\quad K_{12}^{1}=0,\quad K_{21}^{1}=0,$

$$A=2,\quad B=1,\quad C=1$$

$$M_K=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\det M_K=1\neq 0. \qquad (34)$$

$$\text{Semigrupo} \quad S_1^2 = \begin{array}{ccc} \bullet & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{array} \qquad (35)$$

1.2. Alternativamente:

$$K_{11}^1 = K_{22}^2 = 1, \quad K_{11}^2 = 0, \quad K_{22}^1 = K_{12}^2 = K_{21}^2 = 0, \quad K_{12}^1 = K_{21}^1 = 1.$$

$$\text{Semigrupo} \quad S_2^2 = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \; \underset{\lambda_1 = \lambda_2}{\overset{\text{Isomorfo al cambio}}{}} \; \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{array} = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{array} = S_1^2$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, obtenemos los semigrupos no triviales que preservan la semisimplicidad:

$$\textit{Semigrupo}\quad S_1^2 = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{array} \underset{\cong}{\overset{\substack{\text{Isomorfo}\\ \text{al cambio}}}{(\lambda_1 \to \lambda_2)}} \quad S_2^2 = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \quad (35)$$

$$\text{Semigrupo}\quad S_3^2 = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{array} (\lambda_1 \to \lambda_2) S_4^2 \underset{\cong}{\overset{\substack{\text{Isomorfo}\\ \text{al cambio}}}{=}} \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \to Z_2(\mathrm{mod}\,2) \quad (36)$$

$$\textit{Semigrupo}\quad S_5^2 = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_1 \end{array} \underset{\cong}{\overset{\substack{\text{Isomorfo}\\ \text{al cambio}}}{(\lambda_1 \to \lambda_2)}} \quad S_6^2 = \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{array} \quad (37)$$

Con el álgebra semisimple inicial cualquiera.

S-expansión semisimple del álgebra de Lie SO(3).

Al expandir el grupo SO(3) con el semigrupo S_1^2

$$S_1^2 \times SO(3) = \{E_1, E_{-1}, H_1\} \times \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

$$S_1^2 \times SO(3) = \{E_{(1,1)}, E_{(1,2)}, E_{(-1,1)}, E_{(-1,2)} H_{(1,1)}, H_{(1,2)}\} \qquad (38)$$

Si usamos la partición

$$SO_1(3) = \{E_{(1,1)}, E_{(-1,1)}, H_{(1,1)}\}$$

$$SO_2(3) = \{E_{(1,2)}, E_{(-1,2)}, H_{(1,2)}\}$$

Ambos SO(3) satisfacen las relaciones de conmutación de Cartan-Weyl:

$SO_1(3):$

$$\left\lfloor H_{(1,1)}, E_{(1,1)} \right\rfloor = E_{(1,1)} \qquad \left\lfloor H_{(1,1)}, E_{(-1,1)} \right\rfloor = E_{(-1,1)}$$

$$\left\lfloor H_{(1,1)}, H_{(1,1)} \right\rfloor = 0 \qquad \left\lfloor E_{(1,1)}, E_{(-1,1)} \right\rfloor = 2H_{(1,1)}$$

$SO_2(3):$

$$\left\lfloor H_{(1,2)}, E_{(1,2)} \right\rfloor = E_{(1,2)} \qquad \left\lfloor H_{(1,2)}, E_{(-1,2)} \right\rfloor = E_{(-1,2)}$$

$$\left\lfloor H_{(1,2)}, H_{(1,2)} \right\rfloor = 0 \qquad \left\lfloor E_{(1,2)}, E_{(-1,2)} \right\rfloor = 2H_{(1,2)}$$

Además, ambos grupos se cierran:

$$\left[SO_1(3), SO_1(3)\right] = SO_1(3)$$

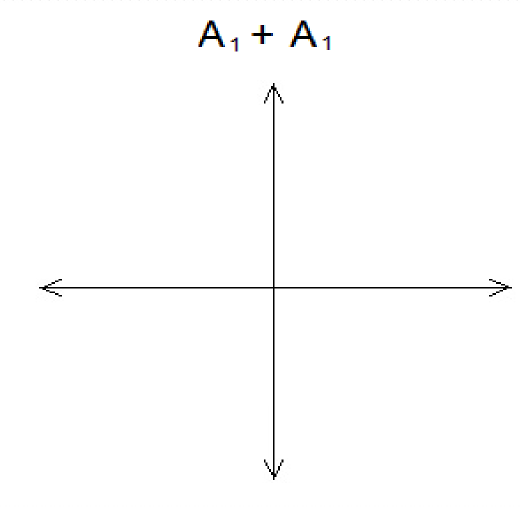
$$\left[SO_2(3), SO_2(3)\right] = SO_2(3)$$

Conclusión: al expandir el álgebra SO(3) con el semigrupo S_1^2 se obtiene una suma directa de dos álgebras SO(3):

$$S_1^2 \times SO(3) = SO_1(3) \oplus SO_2(3) \cong SO(4) \qquad (39)$$

Cada uno es un ideal y por ende subálgebra.

Con su correspondiente diagrama de raíces:



Con su correspondiente diagrama de Dynkin:

Se puede extender la idea para los casos de semigrupos de orden mayor

Para un semigrupo de orden tres $S=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$

$$S_1^3 = \begin{array}{cccc} \bullet & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 \end{array} \qquad (40)$$

Producto directo

$$S_1^3 \times SO(3) = \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\} \times \{E_1, E_{-1}, H_1\}$$

$$S_1^3 \times SO(3) = \left\{ \begin{array}{l} E_{(1,1)}, E_{(1,2)}, E_{(1,3)}, E_{(-1,1)}, E_{(-1,2)} \\ , E_{(-1,3)} H_{(1,1)}, H_{(1,2)}, H_{(1,3)} \end{array} \right\} \qquad (41)$$

Al considerar la suma directa

$$S_1^3 \times SO(3) = SO_1(3) \oplus SO_2(3) \oplus SO_3(3)$$

donde

$$SO_1(3) = \left\{E_{(1,1)}, E_{(-1,1)}, H_{(1,1)}\right\}$$

$$SO_2(3) = \left\{E_{(1,2)}, E_{(-1,2)}, H_{(1,2)}\right\}$$

$$SO_3(3) = \left\{E_{(1,3)}, E_{(-1,3)}, H_{(1,3)}\right\}$$

Se cumplen relaciones de conmutación de Cartan-Weyl en cada subgrupo por separado (doce en total), y cada grupo se cierra.

Cada subespacio vectorial lineal es un ideal y por ende una subálgebra.

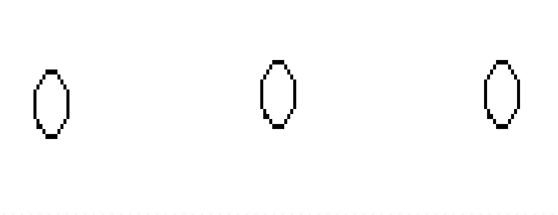
Matriz M_K

$$M_K = \begin{pmatrix} K_{1\alpha}^{\beta}K_{1\beta}^{\alpha} & K_{1\alpha}^{\beta}K_{2\beta}^{\alpha} & K_{1\alpha}^{\beta}K_{3\beta}^{\alpha} \\ K_{2\alpha}^{\beta}K_{1\beta}^{\alpha} & K_{2\alpha}^{\beta}K_{2\beta}^{\alpha} & K_{2\alpha}^{\beta}K_{3\beta}^{\alpha} \\ K_{3\alpha}^{\beta}K_{1\beta}^{\alpha} & K_{3\alpha}^{\beta}K_{2\beta}^{\alpha} & K_{3\alpha}^{\beta}K_{3\beta}^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M_K = 1 \neq 0 \, y$$

$$S_1^3 \times SO(3) = SO_1(3) \oplus SO_2(3) \oplus SO_3(3) \simeq SO(4) \oplus SO(3) \qquad (42)$$

Con su correspondiente diagrama de Dynkin:



La generalización es inmediata.

Al expandir el grupo SO(3) con el semigrupo S_3^2

$$S_3^2 \times SO(3) = V_0 \oplus V_1$$

$$V_0 = \{E_{(1,1)}, E_{(-1,1)}, H_{(1,1)}\}$$
$$V_1 = \{E_{(1,2)}, E_{(-1,2)}, H_{(1,2)}\}$$

donde V_0 es una subálgebra y V_1 es un coseto simétrico

$$[V_0, V_0] = V_0$$
$$[V_1, V_1] = V_0$$
$$[V_0, V_1] = V_1$$

También se puede pasar del grupo SL(2,R) al SO(2,2) utilizando el semigrupo Z_2 :

SL(2,R);

$$[X_a, X_b] = 2X_b \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \circ & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array}$$

$$[X_a, X_c] = -2X_c, \qquad Z_2 = \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{array} = S_3^2 \cong S_4^2$$

$$[X_b, X_c] = 2X_a \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array}$$

$$SO(2,2) = Z_2 \times SL(2,R)$$

$$¡\mathrm{Conformal}!$$

SO(2,2):

$$[M_{\rho\lambda}, M_{\mu\nu}] = -i(\eta_{\mu\lambda} M_{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho} M_{\lambda\nu} + \eta_{\nu\lambda} M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\nu\lambda})$$

$$M_{\rho\nu} \in \{M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34}\}$$

$$\eta = (-1,-1,1,1)$$

Posibles aplicaciones.

- *Obtener las (súper)álgebras mediante la S-expansión geométrica. Aplicación del método para la obtención de lagrangeanos en supergravedad.*
- *Relación entre los diagramas de Dynkin y la S-expansión geométrica.*
- *Implementar el método para el caso de las F.D.A.*

Para el caso no semsimple también se encuentran reglas de selección.

FIN.

¡ GRACIAS !

Consideremos un álgebra de Lie semisimple y compleja:

$$\mathcal{G}_c = \sum_{i=1}^{l} C^i H_i \oplus \sum_{\alpha \neq 0}^{n-l} E_\alpha \qquad (8)$$

tal que C es un coeficiente complejo. Aquí se tiene una descomposición tipo

$$\mathcal{G}_c = H \oplus E \qquad (9)$$

donde H es una subálgebra compacta maximal. La descomposición de Cartan básicamente divide el álgebra en dos subespacios, uno con una métrica de K-C definida negativa y la otra definida positiva (ambas estrictamente definidas), además H y E son mutuamente ortogonales con respecto a este producto interno.

$$(H, E) = 0 \qquad (10)$$