Interacciones Lineales y no Lineales en el Sector Oscuro

Desarrollo del curso

Que es un modelo unificado

Que es un modelo con interacciones

Como se relacionan entre ellos

Modelo efectivo – Estabilidad

Interacción Lineal I (Q_e)

$$Q_e = \alpha_1 \rho_c + \alpha_2 \rho_x + \alpha_3 \rho + \alpha_4 \rho' \qquad ' \equiv \frac{d}{d\eta} = \frac{d}{d\left(\ln \frac{a^3}{a_0^3}\right)}$$

Interacción Lineal II (Q_L)

$$Q_L = Q_e + \alpha_5 \rho_c' + \alpha_6 \rho_x' + \alpha_7 \rho''$$

Ejemplos particulares

Interacción General Lineal (Q_{gL})

$$Q_{gL} = \alpha + Q_L$$

Solución exacta

Interacción no lineal (Q_{nL})

$$Q_{nL} = \frac{\alpha_8 \rho_c^2 + \alpha_9 \rho_c \rho_x + \alpha_{10} \rho_x^2}{\rho} + Q_L + f(n) \rho^{\nu}$$

Relación entre modelos de CDM y DM que interactuan con Q_{nL} y los distintos modelos unificados engendrados por el gas de Chaplygin

1. Haremos un modelo del setor oscuro con dos componentes ρ_c y ρ_x acopladas

Exigencias

a) Ecuaciones de estado constantes

$$P_c = (\gamma_c - 1)\rho_c \; ; \quad P_x = (\gamma_x - 1)\rho_x \; ; \quad \gamma_c, \gamma_x = ctes$$

$$0 < \gamma_x < \gamma_c$$

b) Asintóticamente el universo acelera como

$$a \propto t^{2/3\gamma_s} \; ; \quad \gamma_x < \gamma_s < \gamma_c$$

c) Modelo admite soluciones power-Law (P.L)

$$a = t^{2/3\gamma_s}$$

d) Le soluciones P.L. deben ser "estables"

2. Estudiaremos una interacción que induce un modelo efectivo del sector oscuro cuya ecuación de estado es la de un "gas de Chaplygin relajado"

Evolución del sector oscuro

Las ecuaciones que determinan la evolución de ρ_c y ρ_x con interacción son

$$\begin{cases} \rho = \rho_c + \rho_x \\ \rho' = -\gamma_c \rho_c - \gamma_x \rho_x \end{cases} \qquad ' \equiv d/d\eta \qquad \eta = \ln a^3$$

como $\Delta = \gamma_c - \gamma_x > 0$

$$\rho_c = -\frac{\gamma_x \rho + \rho'}{\Delta} \quad ; \quad \rho_x = \frac{\gamma_c \rho + \rho'}{\Delta}$$

Introducimos una interacción entre los dos fluidos, $3HQ$

$$\rho_c' + \gamma_c \rho_c = -Q \quad ; \quad \rho_x' + \gamma_x \rho_x = Q$$

de aquí tenemos

$$\boxed{\rho'' + (\gamma_c + \gamma_x)\rho' + \gamma_c \gamma_x \rho = Q\Delta}$$

Ecuación de la fuente

El modelo de dos fluidos en interacción se redujo a un modelo de un solo fluido

$$\rho' + \gamma \rho = 0$$

$$p = (\gamma - 1)\rho = -\rho' - \rho$$

$$\gamma = \frac{\gamma_c \rho_c + \gamma_x \rho_x}{\rho} \quad ; \quad \gamma_x < \gamma < \gamma_c$$

Existencia y Estabilidad de P.L.

Las ecuaciones de Einstein para el modelo efectivo

$$3H^2 = \rho \quad ; \quad \rho' + \gamma\rho = 0 \quad ; \quad \gamma = -\frac{2\dot{H}}{3H^2}$$

la ecuación de la fuente se transforma en

$$\gamma' - (\gamma - \gamma_c)(\gamma - \gamma_x) = -\frac{\Delta}{\rho} Q$$

$$\gamma(PL) = \gamma(a = t^{2/3\gamma_s}) = \gamma_s$$

$$\gamma = \gamma_s \Rightarrow Q(\gamma_s) = \frac{(\gamma_s - \gamma_c)(\gamma_s - \gamma_x)}{\Delta} \rho \Rightarrow \boxed{Q(\gamma_s) < 0}$$

1. Sobre $\gamma = \gamma_s$ la energía se transfiere de $\rho_x \longrightarrow \rho_c$

2. $Q(\gamma_s) \sim \rho \sim -\frac{\rho'}{\gamma_s} = \frac{\gamma_c \rho_c + \gamma_x \rho_x}{\gamma_s} \sim \frac{\rho_c \rho_x}{\rho}$

Elegimos interacciones separables

$$Q(\gamma, \rho) = \frac{(\gamma - \gamma_c)(\gamma - \gamma_x)}{\Delta} F(\gamma) \rho$$

$$\boxed{\gamma' = -(\gamma - \gamma_c)(\gamma - \gamma_x)(F - 1)}$$

a) $\gamma = \gamma_s$ es solución si $F(\gamma_s) = 1 \Rightarrow \exists\ PL$

b) $\left(\frac{\partial \gamma'}{\partial \gamma}\right)_{\gamma = \gamma_s} < 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)_{\gamma = \gamma_s} < 0$

Cuando F cumple las condiciones a) y b) γ_s es solución estable $\Rightarrow$ P.L. $a = t^{2/3\gamma_s}$ es solución estable "atractor"

Interacción Lineal I

$$\mathcal{R}_\ell = c_1 \frac{(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)}{\Delta\gamma}\rho + c_2(\gamma_s-\gamma_c)\rho_c - c_3(\gamma_s-\gamma_x)\rho_x - c_4 \frac{(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)}{\gamma_s\,\Delta\gamma}\rho'$$

Luego

$$F_\ell(\gamma) = c_1 \frac{(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)}{(\gamma-\gamma_c)(\gamma-\gamma_x)} + c_2\frac{\gamma_s-\gamma_c}{\gamma-\gamma_c} + c_3\frac{\gamma_s-\gamma_x}{\gamma-\gamma_x} + c_4\frac{\gamma(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)}{\gamma_s(\gamma-\gamma_c)(\gamma-\gamma_x)}$$

$$F(\gamma_s)=1 \Rightarrow \boxed{c_1+c_2+c_3+c_4=1}$$

$\mathcal{R}_\ell$ se reescribe como

$$\mathcal{R}_\ell(\rho,\rho') = \frac{h\rho + \gamma_s^{-1}\left[h-(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)\right]\rho'}{\Delta\gamma}$$

$$h = c_1(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x) - c_2\gamma_x(\gamma_s-\gamma_c) - c_3\gamma_c(\gamma_s-\gamma_x)$$

Los soluciones constantes para γ son

$$\gamma_\ell^- = \gamma^s \; ; \quad \gamma_\ell^+ = \frac{\gamma_c\gamma_x - h}{\gamma_s}$$

La condición de estabilidad nos da

$$\boxed{\gamma_s < \gamma_\ell^+}$$

La ecuación de la fuente es

$$\rho_\ell'' + \gamma_s^{-1}(\gamma_s^2+\gamma_c\gamma_x - h)\rho_\ell' + (\gamma_c\gamma_x-h)\rho_\ell = 0$$

cuya solución es

$$\boxed{\rho_\ell = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3\gamma_\ell^+}}$$

$$\boxed{p_\ell = (\gamma_s-1)\rho_\ell + (\gamma_\ell^+-\gamma_s)b_2 a^{-3\gamma_\ell^+}}$$

$$\Rightarrow p_\ell \neq p_\ell(\rho_\ell)$$

Interacción Lineal

$$Q_\ell = \alpha_1 \rho + \alpha_2 \rho_c + \alpha_3 \rho_x + \alpha_4 \rho'$$

Como

$$\rho_c \Delta = -(\gamma_x \rho + \rho') \quad ; \quad \rho_x \Delta = \gamma_c \rho + \rho'$$

Luego (ρ, ρ') forman una base para las interacciones lineales;

$$Q_\ell = \beta_1 \rho + \beta_2 \rho'$$

La soluciones $\gamma = cte$ son

$$\gamma = \gamma_s \quad ; \quad \gamma^+ = \frac{\gamma_c \gamma_x - h(\alpha_i, \gamma_s)}{\gamma_s}$$

La condición de estabilidad expresa que

$$\gamma_x < \gamma_s < \gamma < \gamma^+ < \gamma_c$$

La interacción estrecha el rango del índice barotrópico efectivo; $\gamma_s < \gamma < \gamma^+$

Las soluciones para ρ, ρ_c, ρ_x son

$$\rho_\ell = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3\gamma^+}$$

$$\rho_{c\ell} = (\gamma_s - \gamma_x) b_1 a^{-3\gamma_s} + (\gamma^+ - \gamma_x) b_2 a^{-3\gamma^+}$$

$$\rho_{x\ell} = (\gamma_c - \gamma_s) b_1 a^{-3\gamma_s} + (\gamma_c - \gamma^+) b_2 a^{-3\gamma^+}$$

$$p_\ell = (\gamma_s - 1)\rho_\ell + (\gamma^+ - \gamma_s) b_2 a^{-3\gamma^+}$$

Además

$$\frac{\rho_c}{\rho_x} = r^+ = \frac{\gamma^+ - \gamma_x}{\gamma_c - \gamma^+} > 0 \quad ; \quad r = r_s = \frac{\gamma_s - \gamma_x}{\gamma_c - \gamma_s} > 0$$

verifican que

$$\boxed{r^+ > r_s}$$

Se alivia el problema de la coincidencia.

Ejemplos

1. $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ $\qquad \Omega_\rho = \dfrac{(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)}{\Delta\gamma}\rho \Rightarrow \Omega_\rho < 0$

$$\begin{cases} \rho = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3(\gamma_c+\gamma_x-\gamma_s)} \to b_1 a^{-3\gamma_s} \\ p = (\gamma_s-1)\rho + (\gamma_c+\gamma_x-2\gamma_s) b_2 a^{-3(\gamma_c+\gamma_x-\gamma_s)} \to (\gamma_s-1)\rho \end{cases}$$

$2\gamma_s < \gamma_c+\gamma_x$

Estable

2. $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ $\qquad \Omega_{\rho_c} = (\gamma_s-\gamma_c)\rho_c \Rightarrow \Omega_{\rho_c} < 0$

$$\begin{cases} \rho = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3\gamma_x} \to b_2 a^{-3\gamma_x} \\ p = (\gamma_s-1)\rho + (\gamma_x-\gamma_s) b_2 a^{-3\gamma_x} \to (\gamma_x-1)\rho \end{cases}$$

Inestable

3. $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ $\qquad \Omega_{\rho_x} = -(\gamma_s-\gamma_x)\rho_x \Rightarrow \Omega_{\rho_x} < 0$

$$\begin{cases} \rho = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3\gamma_c} \to b_1 a^{-3\gamma_s} \\ p = (\gamma_s-1)\rho + (\gamma_c-\gamma_s) b_2 a^{-3\gamma_c} \to (\gamma_s-1)\rho \end{cases}$$

Estable

4. $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ $\qquad \Omega_{\rho'} = \dfrac{(\gamma_c-\gamma_s)(\gamma_s-\gamma_x)}{\gamma_s \Delta\gamma}\rho' \Rightarrow \Omega_{\rho'} < 0$ $\quad (\rho' = -\gamma\rho < 0)$

$$\begin{cases} \rho = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3\gamma_c\gamma_x/\gamma_s} \to b_1 a^{-3\gamma_s} \\ p = (\gamma_s-1)\rho + \gamma_s^{-1}(\gamma_c\gamma_x - \gamma_s^2) b_2 a^{-3\gamma_c\gamma_x/\gamma_s} \to (\gamma_s-1)\rho \end{cases}$$

Estable

Es Estable si $\gamma_c\gamma_x > \gamma_s^2$

Interacción Lineal II

$$\theta_L = c_1\rho_c + c_2\rho_x + c_3\rho_c' + c_4\rho_x' + c_5\rho + c_6\rho' + c_7\rho''$$

Se reduce a: $\theta_L = c_1'\rho + c_2'\rho' + c_3'\rho''$

$$F_L = \frac{(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)}{(\gamma-\gamma_c)(\gamma-\gamma_x)}\left\{b_1 + b_2\frac{\gamma}{\gamma_s} + b_3\frac{\gamma^2-\gamma'}{\gamma_s^2}\right\}$$

$b_i = b_i(c_1', c_2', c_3')$ satisfacen

$$\boxed{b_1 + b_2 + b_3 = 1}$$

Luego:

$$\theta_L = \frac{u\rho + \gamma_s^{-1}\left[u + v - (\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)\right]\rho' + v\gamma_s^{-2}\rho''}{\Delta\gamma}$$

$$\begin{cases} u = (\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)\,b_1 \\ v = (\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)\,b_3 \end{cases}$$

Las soluciones constantes para γ son

$$\gamma_L^- = \gamma_s \quad ; \quad \gamma_L^+ = \gamma_s\,\frac{\gamma_c\gamma_x - u}{\gamma_s^2 - v}$$

Condición de estabilidad $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma_s < \gamma_L^+}$

$$\begin{cases} \rho_L = b_1' e^{-3\gamma_s} + b_2' e^{-3\gamma_L^+} \rightarrow b_1' e^{-3\gamma_s} \\ p_L = (\gamma_s-1)\rho_L + (\gamma_L^+ - \gamma_s) b_2' e^{-3\gamma_L^+} \rightarrow (\gamma_s-1)\rho_L \end{cases}$$

Estable

Solución general

La solución de la ecuación de Friedmann ;

$$3A^2 = \rho_\ell = b_1 a^{-3\gamma_s} + b_2 a^{-3\gamma^+}$$

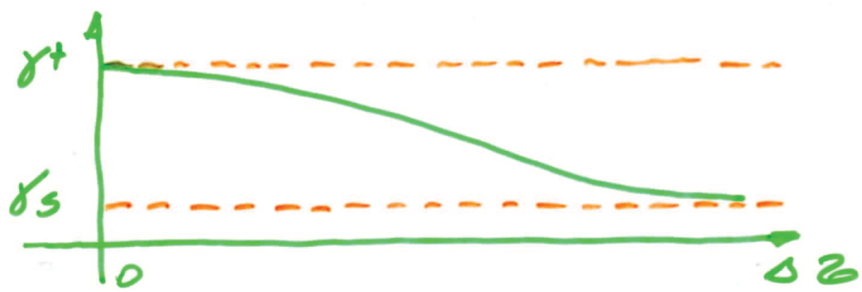
es

$$a_1 = \{\omega \sinh \Delta z\}^{\frac{2}{3(\gamma^+ - \gamma_s)}} \qquad \omega^2 = \frac{b_1}{b_2}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{3b_2}\,(\gamma^+ - \gamma_s)} \int \{\omega \sinh \Delta z\}^{\frac{\gamma_s}{\gamma^+ - \gamma_s}} \, dz$$

Como $\gamma^+ > \gamma_s$, hacemos coincidir los límites de las variables t y z. Esto permite escribir el índice barotrópico como

$$\boxed{\gamma_\ell = \frac{\gamma^+ + \gamma_s \sinh^2 \omega \Delta z}{\cosh^2 \omega \Delta z}}$$



{ Fijamos $\gamma^+ = 1$
Ajustamos γ_s con las observaciones

Interacción lineal General

$$\rho_{gL} = \frac{\rho_0}{\Delta\gamma} + \rho_L$$

La ecuación de la fuente es

$$(1-\nu\gamma_s^{-2})\rho'' + \gamma_s^{-1}(\gamma_s^2+\gamma_c\gamma_{\varphi}-u-\nu)\rho' + (\gamma_c\gamma_x - u)\rho = \rho_0$$

cuya solución general es

$$\begin{cases} \rho_{gL} = \Lambda_{eff} + b_1' a^{-3\gamma_s} + b_2' a^{-3\gamma_L^+} \\ p_{gL} = -\Lambda_{eff}\gamma_s + (\gamma_s - 1)\rho_{gL} + (\gamma_L^+ - \gamma_s) b_2' a^{-3\gamma_L^+} \end{cases}$$

$$\Lambda_{eff} = \frac{\rho_0\gamma_s}{\gamma_L^+(\gamma_s^2-\nu)}$$

Para $a \to \infty$ $\quad \rho_{gL} \to \Lambda_{eff}$

$p_{gL} \to -\Lambda_{eff}$

El factor de escala interpola entre $t^{2/3\gamma_L^+}$ y de Sitter con $H = \sqrt{\frac{3}{\Lambda_{eff}}}$.

Interacciones no Lineales

Vamos a estudiar la interacción

$$Q_{nl} = Q_l + \frac{c_1\rho_c^2 + c_2\rho_c\rho_x + c_3\rho_x^2}{\rho} + f(\eta)\rho^{\nu}\ ; \qquad \begin{matrix} \nu = cte \\ \eta = \ln a^3 \end{matrix}$$

La ecuación de la fuente se reescribe como

$$\rho\rho'' + b_1\rho\rho' + b_2\rho'^2 + b_3\rho^2 = b_4 f \rho^{\nu+1}$$

Haciendo $\nu = b_2$ y $x = \rho^{1+b_2}$

$$\boxed{x'' + b_1 x' + b_3(1+b_2)x = b_4(1+b_2)f(\eta)}$$

La solución general es

$$* \begin{cases} \rho_{nl} = \left\{ b_5 a^{3\lambda^-} + b_6 a^{3\lambda^+} + x_p \right\}^{\frac{1}{1+b_2}} \\ p_{nl} = -\left\{ 1 + \frac{\lambda^-}{1+b_2} \right\} \rho_{nl} - \frac{b_6 \Delta\lambda a^{3\lambda^+} + x_p' - \lambda^- x_p}{(1+b_2)\rho_{nl}^{b_2}} \end{cases}$$

$$2\lambda^{\pm} = -b_1 \mp \sqrt{b_1^2 - 4b_3(1+b_2)}$$

$$\Delta\lambda = \lambda^+ - \lambda^- > 0$$

(*) Define un "gas de Chaplygin relajado"

Caso homogéneo ($f=0$)

$$\rho_h = \left\{ b_5 a^{3\lambda^-} + b_6 a^{3\lambda^+} \right\}^{\frac{1}{1+b_2}}$$

$$p_h = -\left\{ 1 + \frac{\lambda^-}{(1+b_2)} \right\} \rho_h - \frac{b_6 \Delta\lambda \, a^{3\lambda^+}}{(1+b_2)\, \rho_h^{b_2}}$$

$$\rho_{ch} = \frac{-1}{[(1+b_2)\Delta]} \left\{ [\lambda^- + \gamma_x (1+b_2)] \rho_h + b_6 \Delta\lambda \frac{a^{3\lambda^+}}{\rho_h^{b_2}} \right\}$$

$$\rho_{xh} = \frac{1}{(1+b_2)\Delta} \left\{ (\lambda^- + \gamma_c (1+b_2)) \rho_h + b_6 \Delta\lambda \frac{a^{3\lambda^+}}{\rho_h^{b_2}} \right\}$$

1. $a \to \infty \to \rho_h \to a^{\frac{3\lambda^\pm}{1+b_2}} \Rightarrow a \sim t^{-\frac{2(1+b_2)}{3\lambda^\pm}}$

2. $\frac{1+b_2}{3\lambda^\pm} > 0 \Rightarrow$ fase final phantom

3. $b_3 = 0 \Rightarrow \lambda^+ = 0 \Rightarrow$ fase final de Sitter

Ejemplos

$$Q_{nc} = \alpha \gamma_c \frac{\rho_c \rho_x}{\rho}$$

En este caso: $b_1 = (\gamma_c + \gamma_x)(1+b_2)$; $b_2 = \frac{\alpha \gamma_c}{\Delta\gamma}$

$$b_3 = \gamma_c \gamma_x (1+b_2)$$

Luego las raíces características son

$$\lambda^+_{nl} = -\gamma_x(1+b_2) \quad ; \quad \lambda^-_{nl} = -\gamma_c(1+b_2)$$

$$(*) \begin{cases} \rho = \left[b_5 a^{-3\gamma_c(1+b_2)} + b_6 a^{-3\gamma_x(1+b_2)} \right]^{\frac{1}{1+b_2}} \\ p = (\gamma_c - 1)\rho_n - b_6 \Delta\gamma \dfrac{a^{-3\gamma_x(1+b_2)}}{\rho_n^{b_2}} \end{cases}$$

Elegimos $\begin{cases} \gamma_x = 0 \text{ (energía de vacío)} \Rightarrow b_3 = 0, \; b_2 = \alpha \neq -1 \\ \gamma_c = \gamma_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda^+_{nl} = 0 \end{cases}$

(*) se reduce a:

$$\begin{cases} \rho = \left[\dfrac{B}{\gamma_0} \pm \left(\dfrac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_0(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ p = (\gamma_0 - 1)\rho - \dfrac{B}{\rho^\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \neq -1 \\ \gamma_0 \neq 0 \end{cases}$$

Para $\gamma_0 = -1$

$$(*)(**) \begin{cases} \rho = \rho_0 \left[\pm 1 + b \ln\left(\dfrac{a}{a_0}\right)^3 \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} & \rho_0 = \rho_0(b_8, b_9) \\ p = -\rho - \dfrac{b\rho_0}{1+\alpha}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^\alpha & b = b(b_8, b_9) \\ a = a_0 \exp \dfrac{1}{3b} \left\{ \pm 1 + \left[\dfrac{b\sqrt{3\rho_0}(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)} \Delta t \right]^{\frac{2(1+\alpha)}{2\alpha+1}} \right\} \end{cases}$$

(*)(*) Generaliza la ecuación politrópica $p = \kappa \rho^{\gamma_p}$ donde γ_p es el índice politrópico y κ es una constante.

Gas de Chaplygin Modificado

Elegimos la interacción

$$Q_{ho} = \alpha \, \gamma_c \, \frac{\rho_c \rho_x}{\rho}$$

y hacemos

1. $\gamma_x = 0$ (energía de vacío)
2. $\gamma_c = \gamma_0$
3. $b_2 = \alpha$
4. $\lambda^+ = 0$

nos queda

$$\begin{cases} \rho = \left\{ \dfrac{B}{\gamma_0} \pm \left(\dfrac{a_0}{a} \right)^{3\gamma_0(1+\alpha)} \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} \\[2ex] p = (\gamma_0 - 1)\rho - \dfrac{B}{\rho^\alpha} \end{cases} \qquad B = \alpha e$$

Modelos interactuantes y unificados

Teníamos que

$$\rho_c = -\frac{\gamma_x \rho + \rho'}{\Delta\gamma} \quad ; \quad \rho_x = \frac{\gamma_c \rho + \rho'}{\Delta\gamma}$$

Si tenemos un modelo unificado, en el cual conocemos la ecuación de estado $p = p(\rho)$ y usamos que $\rho' = -\rho - p$. nos queda

$$\rho_c = \frac{p + (1-\gamma_x)\rho}{\Delta\gamma} \quad ; \quad \rho_x = \frac{-p + (\gamma_c - 1)\rho}{\Delta\gamma}$$

además como $\rho'' = \rho + p - p'$, usando en de fuente

$$Q = \frac{1}{\Delta\gamma}\left\{\gamma_c\gamma_x \rho + (\rho + p)\left\{1 - (\gamma_c + \gamma_x) + \frac{dp}{d\rho}\right\}\right\}$$

Para el gas de Chaplygin "$p = (\gamma_0 - 1)\rho - \frac{B}{\rho^\alpha}$"

$$\rho_c = \frac{\rho}{\Delta\gamma}\left\{\gamma_0 - \gamma_x - \frac{B}{\rho^{\alpha+1}}\right\}$$

$$\rho_x = \frac{\rho}{\Delta\gamma}\left\{\gamma_c - \gamma_0 + \frac{B}{\rho^{\alpha+1}}\right\}$$

$$Q = \alpha\frac{\gamma_c \rho_c \rho_x + \gamma_x \rho_x^2}{\rho} + (1+\alpha)(\gamma_0 - \gamma_c)(\gamma_c \rho_c + \gamma_x \rho_x) + \gamma_x \rho_x$$

$$r = \frac{\rho_c}{\rho_x} = \frac{-B + (\gamma_0 - \gamma_x)\rho^{\alpha+1}}{B + (\gamma_c - \gamma_0)\rho^{\alpha+1}}$$

Para $\gamma_x = 0$ y $\gamma_0 = \gamma_c \Rightarrow Q = \alpha\gamma_c \frac{\rho_c \rho_x}{\rho}$

Conclusiones

1. La ecuación de la fuente

$$\rho'' + (\gamma_c + \gamma_x)\rho' + \gamma_c\gamma_x \rho = Q\,\Delta$$

determina las componentes oscuras

$$\rho_c = \rho_c(\rho, \rho') \quad ; \quad \rho_x = \rho_x(\rho, \rho')$$

2. ρ, ρ', ρ'' forman una base para expresar las interacciones lineales

$$Q_\ell = \alpha_1\rho + \alpha_2\rho_c + \alpha_3\rho_x + \alpha_4\rho' + \alpha_5\rho_c' + \alpha_6\rho_x' + \alpha_7\rho''$$

3. Q_ℓ produce soluciones PL estables

4. Sobre el atractor

$$Q_\ell(\gamma_s) < 0$$

se transfiere energía de $\rho_x \longrightarrow \rho_c$

5. La interacción estrecha el rango de los valores del índice barotrópico efectivo.

$$\gamma_x < \gamma_s < \gamma < \gamma^+ < \gamma_c$$

6. Sobre el atractor (domina ρ_x)

$$r_s = \frac{\rho_c}{\rho_x} = \frac{\gamma_s - \gamma_x}{\gamma_c - \gamma_s} > 0$$

Se alivia problema de la coincidencia

7. En la fase inicial (domina ρ_c)

$$r^+ = \frac{\gamma^+ - \gamma_x}{\gamma_c - \gamma^+} > r_s$$

8. Las interacciones

$Q_e \sim \rho$; $Q_e \sim \rho_x$ son estables

$Q_e \sim \rho_c$ inestable

$Q_e \sim \rho'$ $\gamma_c \gamma_x > \gamma_s^2$ estable

9. La ecuación de Friedmann ($3H^2 = \rho$) es integrable para todas las interacciones lineales

10. Los modelos con dos componentes oscuras en interacción y los modelos unificados pueden asociarse entre sí

11. La ecuación de estado del fluido efectivo origina un "gas de Chaplygin relajado" cuando los dos compontes oscuros se acoplan con una interacción no lineal.

Modelo con tres fluidos en interacción

Luis P. Chimento
Departamento de Fsica, FCEyN, UBA e IFIBA, CONICET,
Buenos Aires, Argentina

February 2, 2014

1 Repaso del modelo de dos fluidos acoplados en FRW

2 Modelo de tres fluidos acoplados en FRW

2.1 Espacio interno

2.2 Interación transversal Q_t

3 Ecuación de la fuente

3.1 Solución general para Q_t lineal

3.2 Ecuación de la fuente para una interacción general

4 Ejemplo: campo escalar + materia

4.1 Solución

4.2 Reconstrucción del campo y potencial

Dos fluidos acoplados en FRW

Ec. de estado constantes

$$p_1 = (\gamma_1 - 1)\rho_1 \; ; \; p_2 = (\gamma_2 - 1)\rho_2 \quad ; \quad \gamma_1, \gamma_2 = \text{ctes}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 \\ \rho' = -\gamma_1 \rho_1 - \gamma_2 \rho_2 \end{cases} \qquad ' \equiv d/d\eta \quad \eta = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3$$

de aquí resulta

$$\rho_1 = -\frac{\gamma_2 \rho + \rho'}{\Delta} \; ; \; \rho_2 = \frac{\gamma_1 \rho + \rho'}{\Delta} \; , \quad \Delta = \gamma_1 - \gamma_2$$

Introduciendo las interacciones $3HQ_i$:

$$\begin{cases} \rho_1' + \gamma_1 \rho_1 = Q_1 \\ \rho_2' + \gamma_2 \rho_2 = Q_2 \end{cases} \qquad Q_1 + Q_2 = 0$$

Obtemos la "ecuación de la fuente"

$$\boxed{\rho'' + (\gamma_1 + \gamma_2)\rho' + \gamma_1 \gamma_2 \rho = Q} \quad ; \quad Q = Q_2 \Delta$$

Para un acoplamiento lineal

$$Q_l = \alpha \rho + \beta \rho' + \nu \rho''$$

la solución general es

$$\boxed{\rho = c_1 a^{-3\gamma^-} + c_2 a^{-3\gamma^+}}$$

Tres fluidos acoplados en FRW

$$\begin{cases} p_1 = (\gamma_1 - 1)\rho_1 \\ p_2 = (\gamma_2 - 1)\rho_2 \\ p_3 = (\gamma_3 - 1)\rho_3 \end{cases} \qquad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = \text{ctes.}$$

La dinámica del modelo se rige por

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \\ \rho' = -\gamma_1\rho_1 - \gamma_2\rho_2 - \gamma_3\rho_3 \end{cases}$$

Acoplamos las componentes con $3HQ_i$

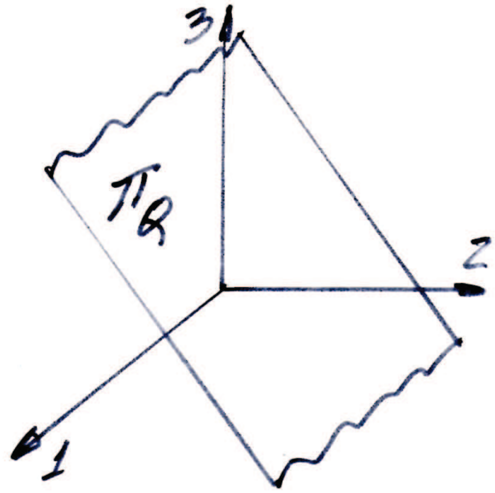
$$\begin{cases} \rho_1' + \gamma_1\rho_1 = Q_1 \\ \rho_2' + \gamma_2\rho_2 = Q_2 \\ \rho_3' + \gamma_3\rho_3 = Q_3 = -Q_1 - Q_2 \end{cases} \qquad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

Ahora planteo dos interrogantes

1. ¿Existe algún modelo privilegiado con un solo grado de libertad?

2. ¿Podremos expresar ρ_i en función de sus derivadas de manera unívoca?

Respuesta 1.



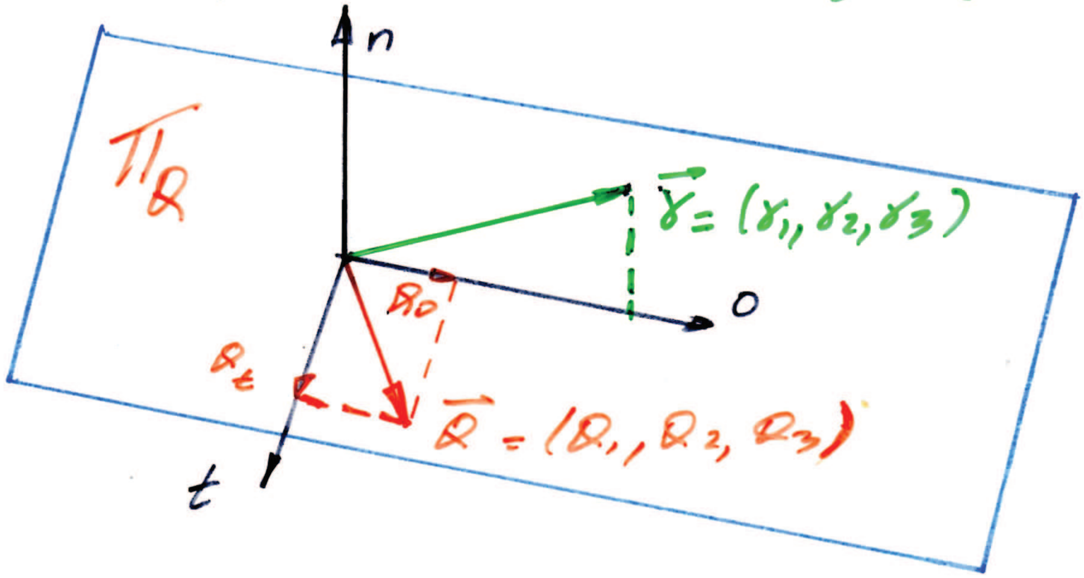
Notemos que la condición

$$Q_1+Q_2+Q_3=0$$

genere un plano Π_Q
que contiene al vector

$$\vec{Q}=(Q_1,\,Q_2,\,Q_3)$$

en el espacio interno con ejes (1, 2, 3)



Entonces la condición "adional"

$$\vec{Q}\cdot\vec{\gamma}=0$$

define una "única interacción transversal"

$$\vec{Q}_t=(\gamma_2-\gamma_3;\gamma_3-\gamma_1,\gamma_1-\gamma_2)\,\frac{Q}{\Delta}$$

(privilegiada) con un solo grado de libertad "Q"

Respuesta 2:

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \\ \rho' = -\gamma_1\rho_1 - \gamma_2\rho_2 - \gamma_3\rho_3 \end{cases}$$

Ahora derivamos la 2^{da} ec. y usamos que

$$\rho_i' + \gamma_i \rho_i = Q_{ti}$$

Luego resulta

$$\{\ \rho'' = \gamma_1^2\rho_1 + \gamma_2^2\rho_2 + \gamma_3^2\rho_3$$

Este sistema es invertible porque la matriz de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo

$$\Delta = |V| = (\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3) \neq 0$$

$$\Rightarrow \rho_i = \rho_i(\rho, \rho', \rho'')$$

$$
\begin{cases}
\rho_1 = \Delta^{-1}(\gamma_2-\gamma_3)\left\{\gamma_2\gamma_3\,\rho + (\gamma_2+\gamma_3)\rho' + \rho''\right\} \\[2ex]
\rho_2 = -\Delta^{-1}(\gamma_1-\gamma_3)\left\{\gamma_1\gamma_3\,\rho + (\gamma_1+\gamma_3)\rho' + \rho''\right\} \\[2ex]
\rho_3 = \Delta^{-1}(\gamma_1-\gamma_2)\left\{\gamma_1\gamma_2\,\rho + (\gamma_1+\gamma_2)\rho' + \rho''\right\}
\end{cases}
$$

$$(+)$$

$$\rho_i' + \gamma_i\rho_i = Q_{ti}$$

$$\rho''' + (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\rho'' + (\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)\rho' + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\,\rho =$$

$$\gamma_1 Q_{t2}\gamma_3 + \gamma_3 Q_{t1}\gamma_2 + \gamma_2 Q_{t3}\gamma_1$$

$$\boxed{\rho''' + (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\rho'' + (\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)\rho' + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\,\rho = Q}$$

Esta "ecuación de la fuente" es soluble para cualquier interacción transversal lineal

$$\boxed{\vec{Q}_t\,(\text{lineal}) = (\gamma_2-\gamma_3,\ \gamma_3-\gamma_1,\ \gamma_1-\gamma_2)\,\frac{Q}{\Delta}\,(\text{lineal})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_\ell = Q(\text{lineal}) = {} & \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_3 + \beta_1\rho_1' + \beta_2\rho_2' + \beta_3\rho_3' \\ & + \lambda_1\rho + \lambda_2\rho' + \lambda_3\rho'' + \lambda_4\rho''' \end{aligned}}$$

$$\boxed{\rho = 3Hc^2\left\{A\,a^{-3\gamma_0} + B\,a^{-3\gamma^+} + C\,a^{-3\gamma^-}\right\}}$$

Interaccion general (no polarizada)

El sistema de ecuaciones (algebraico) para determinar las densidades ρ_i es:

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \\ \rho' = -\gamma_1 \rho_1 - \gamma_2 \rho_2 - \gamma_3 \rho_3 \\ \rho'' + \vec{\gamma} \cdot \vec{Q} = \gamma_1^2 \rho_1 + \gamma_2^2 \rho_2 + \gamma_3^2 \rho_3 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{(\gamma_2 - \gamma_3)}{\Delta} \left\{ \gamma_2 \gamma_3 \rho + (\gamma_2 + \gamma_3) \rho' + \rho'' + \vec{\gamma} \cdot \vec{Q} \right\} \\ \rho_2 = -\dfrac{(\gamma_1 - \gamma_3)}{\Delta} \left\{ \gamma_1 \gamma_3 \rho + (\gamma_1 + \gamma_3) \rho' + \rho'' + \vec{\gamma} \cdot \vec{Q} \right\} \\ \rho_3 = \dfrac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\Delta} \left\{ \gamma_1 \gamma_2 \rho + (\gamma_1 + \gamma_2) \rho' + \rho'' + \vec{\gamma} \cdot \vec{Q} \right\} \end{cases}$$

En este caso la "ecuación de la fuente" es

$$\boxed{\begin{gathered} \rho''' + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \rho'' + (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3) \rho' + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \rho = \\ \gamma_1 Q_2 \gamma_3 + \gamma_3 Q_1 \gamma_2 + \gamma_2 Q_3 \gamma_1 - \vec{\gamma} \cdot \vec{Q}' \end{gathered}}$$

Ejemplo: El campo escalar

$$\begin{cases} 3H^2 = \rho_m + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \\ \rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V \quad ; \quad p_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V \end{cases}$$

Introducimos las ecuaciones de estado

$$\begin{cases} p_v = -\rho_v \quad ; \quad p_m = 0 \quad ; \quad p_s = \rho_s \\ \gamma_v = 0 \quad ; \quad \gamma_m = 1 \quad ; \quad \gamma_s = 2 \end{cases}$$

Para una interacción transversal lineal

$$\rho = 3H_0^2 \left\{ A\, a^{-3\gamma_0} + B\, a^{-3\gamma^+} + C\, a^{-3\gamma^-} \right\}$$

de manera que

$$\begin{cases} \rho_v = \rho_v \{a, \gamma_0, \gamma^+, \gamma^-; A, B, C\} \\ \rho_m = \rho_m \{a, \gamma_0, \gamma^+, \gamma^-; A, B, C\} \\ \rho_s = \rho_s \{a, \gamma_0, \gamma^+, \gamma^-; A, B, C\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_v = \rho_v(a) = V(a) \\ \rho_s = \rho_s(a) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(a) \end{cases} \Rightarrow \boxed{V = V(\varphi)}$$

Conclusiones

1. Mostramos que los modelos de dos y tres fluidos acoplados se describen de manera unificada.

2. Vimos que la interacción transversal es un acoplamiento "privilegiado".

3. La ecuacion de la fuente es completamente soluble para cualquier acoplamiento transversal lineal.

4. El modelo se adapta muy bien para describir un escenario con materia y campo escalar.

Conclusión extra

Modelo de las tres bebidas

Pisco + Cachaza + Mate

\+ + + +

Interacción transversal

Flor de Vino