

Modelos de Energía Oscura viscosa e interactuante

arXiv: 1306.3270 (Aceptado en PRD)

En colaboración con: Arturo Avelino¹ y Luis Ureña-López¹

¹Dpto de Física, DCI, Campus León, Universidad de Guanajuato



Dr. Yoelsy Leyva Nodal

Instituto de Física. PUCV

18 de Noviembre de 2013

Plan de la charla

- Introducción y motivación
- Cosmología de fluidos oscuros interactuantes
- Perspectiva de los sistemas dinámicos
 - Condiciones generales para CCD (**C**omplete **C**osmological **D**ynamics)
 - Ejemplo: $Q = 3\alpha H \rho_{de}$
- Restricciones observacionales
- Conclusiones

Introducción y motivación

Paradigma actual: Λ CDM

- Planck 2013 results.XVI. Cosmological parameters.
arXiv:1306.5076
 - “...and to conclude that there is no strong evidence that the dark energy is anything other than a **cosmological constant**. ”
- ...pero posee problemas ☹

Introducción y motivación

Alternativas al paradigma:

- energía oscura variable en el tiempo (campos escalares, fluidos **oscuros...**)
- gravedad modificada ($f(\mathbf{R})$, mundos branas...)

Modelos de interacción entre DM-DE:

- resuelven o alivian los problemas de Λ CDM 😊
- gran cantidad de funciones de interacción propuestas 😞

Introducción y motivación

Otras características a tener en cuenta → Procesos disipativos en un Universo en expansión (viscosidad de cizallamiento, transferencia de calor, viscosidad de bulto):

- viscosidad de cizallamiento (shear) y transferencia de calor son fenómenos direccionales → ☹ Principio Cosmológico
- viscosidad de bulto → 😊 permitida en fluidos cosmológicos.

La viscosidad de bulto puede ser un mecanismo para crear una fase de expansión acelerada debido a su **presión negativa**: trabajos precedentes en inflación y en aceleración tardía del Universo: PRD **86**, 083501 (2012); PRD **82**, 063507 (2010); JCAP **1108**, 023 (2011)

Cosmología de fluidos oscuros interactuantes

Ingredientes del modelo:

- métrica FRW, radiación (fotones y neutrinos), bariones, DM (Materia Oscura) y DE (Energía Oscura)
- DM $\rightarrow$ fluido imperfecto con viscosidad de bulto (bulk viscosity)
- El resto de los componentes $\rightarrow$ fluidos perfectos
- Extra: interacción entre DM y DE

Cosmología de fluidos oscuros interactuantes

Ecuaciones del campo:

$$\dot{H} = -4\pi G \left(\frac{4}{3}\rho_r + \rho_b + \rho_{dm} + \gamma_{de}\rho_{de} - 3H\zeta \right), \quad (1a)$$

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r, \quad (1b)$$

$$\dot{\rho}_b = -3H\rho_b, \quad (1c)$$

$$\dot{\rho}_{dm} = -3H\rho_{dm} + Q - 3H(-3H\zeta), \quad (1d)$$

$$\dot{\rho}_{de} = -3H\gamma_{de}\rho_{de} - Q, \quad (1e)$$

donde:

- H es el parámetro de Hubble,
- Q es la función de interacción entre DM y DE ,
- ζ es el coeficiente de viscosidad.

Cosmología de fluidos oscuros interactuantes

La restricción de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_b + \rho_{dm} + \rho_{de})$$

Consideraciones:

- $\zeta \propto \rho_t^n \longrightarrow \zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{24\pi G}} \rho_t^{1/2} = \left(\frac{1}{8\pi G}\right) H \zeta_0$
- $\zeta_0 > 0$: requerimiento de LSLT

Perpectiva de los sistemas dinámicos

Variables

$$x = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{de}}, \quad y = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{dm}}, \quad (2a)$$

$$u = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{b}}, \quad z = \frac{8\pi G}{3H^3} Q. \quad (2b)$$

Ecuaciones del el sistema autónomo

$$\frac{dx}{dN} = -z + x(4 - u - y - 3\gamma_{\text{de}} - 3\zeta_0) - x^2(4 - 3\gamma_{\text{de}}), \quad (3a)$$

$$\frac{dy}{dN} = y(1 - u - y - x(4 - 3\gamma_{\text{de}}) - 3\zeta_0) + z + 3\zeta_0, \quad (3b)$$

$$\frac{du}{dN} = u(1 - u - y - x(4 - 3\gamma_{\text{de}}) - 3\zeta_0), \quad (3c)$$

Perpectiva de los sistemas dinámicos

La restricción de Friedmann queda como:

$$\Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r = 1 - x - y - u$$

Tomando en cuenta que $0 \leq \Omega_r \leq 1$, e imponiendo que tanto la DM como la DE son definidas positivas y acotadas para todo tiempo, podemos definir el espacio de fase como:

$$\Psi = \{(x, y, u) : 0 \leq 1 - x - y - u \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq u < 1\}$$

Perpectiva de los sistemas dinámicos

Parámetros cosmológicos

$$w_{eff} = \frac{1}{3}(1 - u - y - x(4 - 3\gamma_{de}) - 3\zeta_0)$$

$$q = -(1 + \dot{H}/H^2) = \frac{1}{2}\{2 - u - y - x(4 - 3\gamma_{de}) - 3\zeta_0\}$$

Perpectiva de los sistemas dinámicos

Modelos a estudiar:

- $Q = 3Hf(\rho_{dm}, \rho_{de})$ tal que $z = z(x, y)$.

Algunas funciones de interacción $Q(\rho_{de}, \rho_{dm})$ para las cuales el sistema mostrado es autónomo

Model	$Q(\rho_{de}, \rho_{dm})$	$z(x, y)$	References
i	$3H(\alpha_1\rho_{de} + \alpha_2\rho_{dm})$	$3(\alpha_1x + \alpha_2y)$	a)
ii	$3H\lambda \frac{\rho_{de}\rho_{dm}}{\rho_{de}+\rho_{dm}}$	$3\lambda \frac{xy}{x+y}$	b)
iii	$3H\lambda\rho_{dm}$	$3\lambda y$	c)

a) PRD 79, 063518 (2009); JCAP 0805, 007 (2008)

b) Gen. Rel. Grav. 35, 413 (2003)

c) Phys. Lett. B521, 133 (2001); Phys. Rev. D76, 023508 (2007)

Perpectiva de los sistemas dinámicos

Condiciones generales para *CCD*

- **R**adiation **D**ominated **E**ra (RDE)
- **M**atter **D**ominated **E**ra (MDE)
- Expansión acelerada

Puntos críticos

$$0 = -z_* + x_*(4 - u_* - y_* - 3\gamma_{de} - 3\zeta_0) - x_*^2(4 - 3\gamma_{de})$$

$$0 = y_*(1 - u_* - y_* - x_*(4 - 3\gamma_{de}) - 3\zeta_0) + z_* + 3\zeta_0$$

$$0 = u_*(1 - u_* - y_* - x_*(4 - 3\gamma_{de}) - 3\zeta_0)$$

donde: $z = z(x_*, y_*)$

Perpectiva de los sistemas dinámicos

RDE

- $\Omega_r = 1 \longrightarrow (x_*, y_*, u_*) = (0, 0, 0)$

Condiciones que se deben satisfacer simultáneamente:

$$z_* = 0, \quad z_* = -3\zeta_0$$

- La primera condición se satisface para muchas funciones de interacción (ejemplo: las mostradas anteriormente)
- La segunda condición requiere que $\zeta_0 = 0$.

No es posible reconciliar este caso con una viscosidad de bulto distinta de cero...☹

Perpectiva de los sistemas dinámicos

RDE

- $\Omega_r = 1 - \Omega_{dm} \longrightarrow (x_*, y_*, u_*) = (0, y_*, 0)$
- válido si $y_* \ll 1$

Condiciones que se deben safisfacer simultáneamente:

$$z_* = 0, \quad y_* = -3\zeta_0$$

- La primera condición requiere que el término de interacción DM-DE sea nula
- La segunda condición require que $\zeta_0 < 0$ (para preservar que $y \geq 0$).

La segunda condición está en contradicción con la LSLT ($\zeta_0 > 0$), siendo un escenario físicamente imposible ☹

Perpectiva de los sistemas dinámicos

RDE

- $\Omega_r = 1 - \Omega_{de} \longrightarrow (x_*, y_*, u_*) = (x_*, 0, 0)$
- válido si $x_* \ll 1$

Condiciones que se deben safisfacer simultáneamente:

$$x_* = \frac{-3\zeta_0}{4 - 3\gamma_{de}}, \quad z_* = -3\zeta_0$$

- Como $\gamma_{de} < 1$, entonces $\zeta_0 < 0$ (para preservar que $x \geq 0$)

Esta condición nuevamente está en contradicción con la LSLT ($\zeta_0 > 0$), siendo un escenario físicamente imposible ☹

Perpectiva de los sistemas dinámicos

MDE

- $\Omega_{dm} = 1 - \Omega_b \longrightarrow (x_*, y_*, u_*) = (0, \beta, 1 - \beta)$
- válido si $\beta \in [0, 1]$

Condiciones que se deben safisfacer simultáneamente:

$$0 = -z_* , \quad 0 = -3(1 - \beta)\zeta_0$$

- Si $\zeta_0 = 0$ se obtiene MDE
- Si $\beta = 1$ tendríamos una MDE dominada enteramente por la materia oscura (sin contribución de bariones)

Al igual que en la RDE, el modelo requiere de una contribución nula de la viscosidad para tener una MDE ☹

Perpectiva de los sistemas dinámicos

MDE

- $\Omega_{dm} = 1 - \Omega_b - \Omega_{de} \longrightarrow (x_*, y_*, u_*) = (1 - y_* - u_*, y_*, u_*)$
- $x_* + y_* + u_* = 1$

Condiciones que se deben safisfacer simultáneamente. Caso a):

$$z_* = 3(1 - y_*)((1 - \gamma_{de})y_* - \zeta_0), \quad u_* = 0$$

La contribución nula de los bariones y la relación escalante entre DM y DE sugieren que es imposible tener una MDE en esta caso. ☹

Perpectiva de los sistemas dinámicos

MDE

- $\Omega_{dm} = 1 - \Omega_b - \Omega_{de} \longrightarrow (x_*, y_*, u_*) = (1 - y_* - u_*, y_*, u_*)$
- $x_* + y_* + u_* = 1$

Condiciones que se deben safisfacer simultáneamente. Caso b):

$$z_* = 3(1 - \gamma_{de})(1 - y_* - u_*), \quad x_* = \zeta_0/(\gamma_{de} - 1)$$

Si $\zeta_0 > 0$ y $\gamma_{de} > 1$: *se está en corcondancia con LSLT pero no representa una DE realista* ☹

Si $\zeta_0 < 0$ y $\gamma_{de} < 1$: *se tiene una DE realista pero se viola la LSLT* ☹

Perpectiva de los sistemas dinámicos

Expansión acelerada

Se obtiene para cualquier valor (positivo o negativo) del coeficiente de viscosidad

Conclusiones parciales

El requerimiento de una dinámica bien comportada descarta todo modelo que responda a las ecuaciones de movimiento vistas anteriormente:

- no es posible describir una RDE y MDE sin entrar en contradicción con la LSLT ☹
- la expansión acelerada del universo si es compatible con la viscosidad de bulto.

Ejemplo: $Q = 3\alpha H\rho_{de} \longrightarrow z = \alpha x$

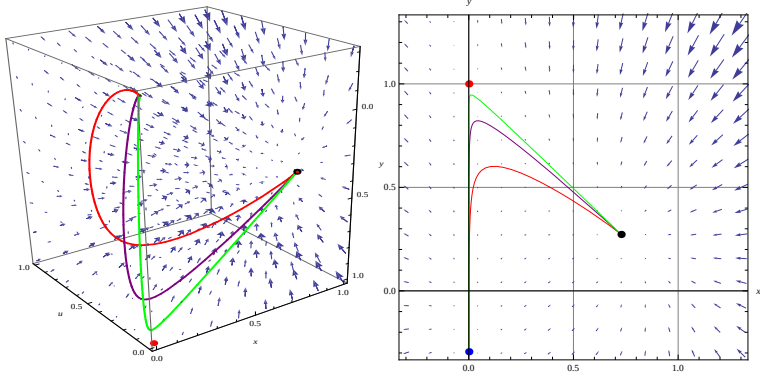
P_i	x	y	u	Existence	Stability
1a	0	$-3\zeta_0$	0	$-\frac{1}{3} \leq \zeta_0 \leq 0$	Unstable if $\zeta_0 > -\frac{1}{3}$, $\alpha < \frac{4}{3} - \gamma_{de}$ Saddle if $\zeta_0 > -\frac{1}{3}$, $\alpha > \frac{4}{3} - \gamma_{de}$ or
1b	x	$-x - 3\zeta_0$	0	$\gamma_{de} = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$ and ($\zeta_0 = 0$, $x = 0$ or $-\frac{1}{3} \leq \zeta_0 < 0$, $0 \leq x \leq -3\zeta_0$)	Removed from phase space. See discussion in Sec. III A.
1c	x	$x(-4 + 3\gamma_{de}) - 3\zeta_0$	0	$\alpha = \frac{4}{3} - \gamma_{de}$, together with those in Table III below.	Saddle if $\zeta_0 < -\frac{1}{3}$
2a	0	1	0	Always	Unstable if $\zeta_0 < -\frac{1}{3}$, $\alpha < 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ Stable if $\zeta_0 > 0$, $\alpha > 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ Saddle if $\zeta_0 < -\frac{1}{3}$, $\alpha > 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ or $-\frac{1}{3} < \zeta_0 < 0$, $\alpha \neq 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ or $\zeta_0 \geq 0$, $\alpha < 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$
2b	0	y	$1 - y$	$\zeta_0 = 0$, $0 < y \leq 1$	Saddle if $\alpha < 1 - \gamma_{de}$
2c	$\frac{\zeta_0}{\gamma_{de}-1}$	y	$1 - y - \frac{\zeta_0}{\gamma_{de}-1}$	$\alpha = 1 - \gamma_{de}$ and ($\zeta_0 > 0$, $0 \leq y < 1$, $\gamma_{de} \geq 1 - \frac{\zeta_0}{y-1}$ or, $\zeta_0 < 0$, $0 \leq y < 1$, $\gamma_{de} \leq 1 - \frac{\zeta_0}{y-1}$ or $\zeta_0 = 0$, $0 < y \leq 1$, $\gamma_{de} \neq 1$)	Saddle if $\zeta_0 > 0$
2d	x	y	$1 - x - y$	$\zeta_0 = \alpha = 0$, $\gamma_{de} = 1$ and ($y = 1$, $x = 0$ or $y = 0$, $0 < x \leq 1$ or $0 < y < 1$, $0 \leq x \leq 1 - y$)	Removed from phase space. See discussion in Sec. III A.

Ejemplo: $Q = 3\alpha H\rho_{de} \longrightarrow z = \alpha x$

3a	$1 - \frac{\alpha + \zeta_0}{1 - \gamma_{de}}$	$\frac{\alpha + \zeta_0}{1 - \gamma_{de}}$	0	$\gamma_{de} < 1, -\zeta_0 \leq \alpha \leq 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ or $\gamma_{de} > 1, 1 - \gamma_{de} - \zeta_0 \leq \alpha \leq -\zeta_0$	Unstable if $\zeta_0 > -\frac{1}{3}, \alpha > \frac{4}{3} - \gamma_{de}$ or $\zeta_0 \leq -\frac{1}{3}, \alpha > 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ Stable if $\zeta_0 > 0, \alpha < 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ or $\zeta_0 \leq 0, \alpha < 1 - \gamma_{de}$ Saddle if $\zeta_0 > 0, 1 - \gamma_{de} < \alpha < \frac{4}{3} - \gamma_{de}$ or $\zeta_0 > 0, 1 - \gamma_{de} - \zeta_0 < \alpha < 1 - \gamma_{de}$ or $-\frac{1}{3} < \zeta_0 \leq 0, 1 - \gamma_{de} - \zeta_0 < \alpha < \frac{4}{3} - \gamma_{de}$ or $-\frac{1}{3} < \zeta_0 < 0, 1 - \gamma_{de} < \alpha < 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$ or $\zeta_0 \leq -\frac{1}{3}, 1 - \gamma_{de} < \alpha < \frac{4}{3} - \gamma_{de}$ or $\zeta_0 < -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} - \gamma_{de} < \alpha < 1 - \gamma_{de} - \zeta_0$
3b	$1 - y$	y	0	$\alpha = -\zeta_0, \gamma_{de} = 1$	Removed from phase space See discussion in Sec. III A

P_i	λ_1	λ_2	λ_3	w_{eff}	Ω_r	q
1a	1	$4 - 3\gamma_{de} - 3\alpha$	$1 + 3\zeta_0$	$\frac{1}{3}$	$1 + 3\zeta_0$	1
1b	1	0	$1 + 3\zeta_0$	$\frac{1}{3}$	$1 + 3\zeta_0$	1
1c	1	0	$1 + 3\zeta_0$	$\frac{1}{3}$	$1 - 3x(\gamma_{de} - 1) + 3\zeta_0$	1
2a	$-1 - 3\zeta_0$	$-3\zeta_0$	$-3(-1 + \gamma_{de} + \alpha + \zeta_0)$	$-\zeta_0$	0	$\frac{1}{2}(1 - 3\zeta_0)$
2b	-1	0	$-3(-1 + \gamma_{de} + \alpha)$	0	0	$\frac{1}{2}$
2c	-1	0	$3\zeta_0$	0	0	$\frac{1}{2}$
2d	-1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
3a	$3(-1 + \gamma_{de} + \alpha)$	$-4 + 3\gamma_{de} + 3\alpha$	$3(-1 + \gamma_{de} + \alpha + \zeta_0)$	$-1 + \gamma_{de} + \alpha$	0	$\frac{1}{2}(-2 + 3\gamma_{de} + 3\alpha)$
3b	0	$-1 - 3\zeta_0$	$-3\zeta_0$	$-\zeta_0$	0	$\frac{1}{2}(1 - 3\zeta_0)$

Ejemplo: $Q = 3\alpha H\rho_{de} \longrightarrow z = \alpha x$



Algunas órbitas del espacio de fase para $(\zeta_0, \gamma_{de}, \alpha) = (0.098, 0.2, 0.12)$

Restricciones observacionales

Observaciones:

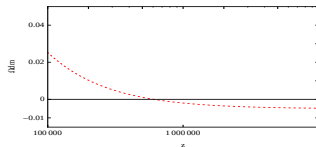
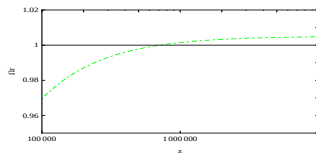
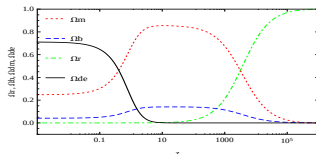
- Supernovas Ia: $n=580$, *Union 2.1, Supernova Cosmology Project*, ApJ **746**, 85 (2012)
- $H(z)$: $n=21$ ApJ **764**, 138 (2013)
- BAO: $n=6$,
 - $n=3$, WiggleZ, MNRAS **418**, 1707 (2011)
 - $n=2$, SDSS, MNRAS **401**, 2148 (2010)
 - $n=1$, 6dFGS, MNRAS **416**, 3017 (2011)
- CMB: JCAP **2010**, 023 (2010)

Restricciones observacionales

SNe									
Model	γ_{de}	α	ζ_0	χ^2_{min}	$\chi^2_{d.o.f.}$	DE	Energy Transfer	LSLT	CCD
I	0^*	$-0.0132^{+0.22}_{-0.37}$	$0.0017^{+0.097}_{-0.075}$	562.223	0.972	Λ	DE $\leftarrow$ DM	✓	✗
II	$-0.0011^{+0.1}_{-0.11}$	$-0.0086^{+0.1}_{-0.11}$	0^*	562.224	0.972	Phantom	DE $\leftarrow$ DM	✓	✓
III	-0.0040 ± 0.14	$\alpha = \zeta_0$	$-0.0026^{+0.035}_{-0.032}$	562.224	0.972	Phantom	DE $\leftarrow$ DM	✗	✗
IV	-0.0052 ± 0.18	0^*	$-0.0037^{+0.055}_{-0.051}$	562.225	0.972	Phantom	None	✗	✗

Si solo los datos para pequeños “redshift” son tomados en cuenta la viscosidad puede ser positiva en ciertos casos....ejemplo Modelo I...puede llevar a conclusiones falsas

Restricciones observacionales: Modelo I SNe

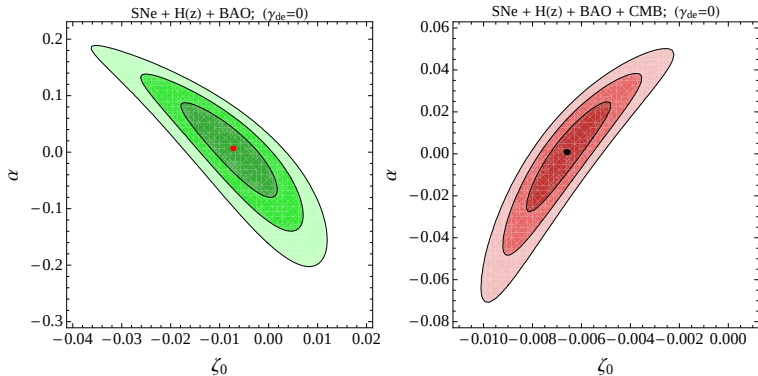


Restricciones observacionales

SNe + BAO + $H(z)$ + CMB									
I	0^*	0.00082 ± 0.0011	$-0.0066^{+0.016}_{-0.018}$	583.899	0.963	Λ	DE $\rightarrow$ DM	$\times$	$\times$
II	$-0.0913^{+0.043}_{-0.046}$	0.0438 ± 0.010	0^*	603.166	0.995	Phantom	DE $\rightarrow$ DM	$\checkmark$	$\checkmark$
III	$-0.023^{+0.042}_{-0.043}$	$\alpha = \zeta_0$	-0.0065 ± 0.0011	583.803	0.963	Phantom	DE $\leftarrow$ DM	$\times$	$\times$
IV	$-0.014^{+0.043}_{-0.044}$	0^*	-0.0063 ± 0.0011	583.795	0.963	Phantom	None	$\times$	$\times$
V	-0.0180 ± 0.122	-0.003 ± 0.022	-0.0064 ± 0.0026	583.775	0.964	Phantom	DE $\leftarrow$ DM	$\times$	$\times$
Λ CDM	0^*	0^*	0^*	588.87	0.973	Λ	None	$\checkmark$	$\checkmark$

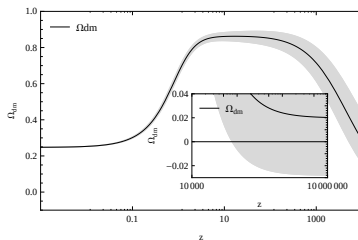
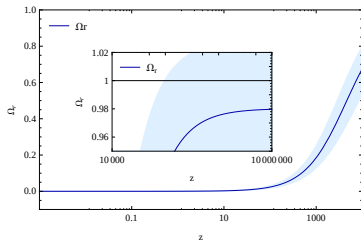
- Si se incluyen los datos para alto “redshift” entonces todos los modelos apuntan consistentemente a que la viscosidad de bulto es **negativa** ☹
- Phantom DE es ligeramente preferida en todos los modelos

Restricciones observacionales: Modelo I



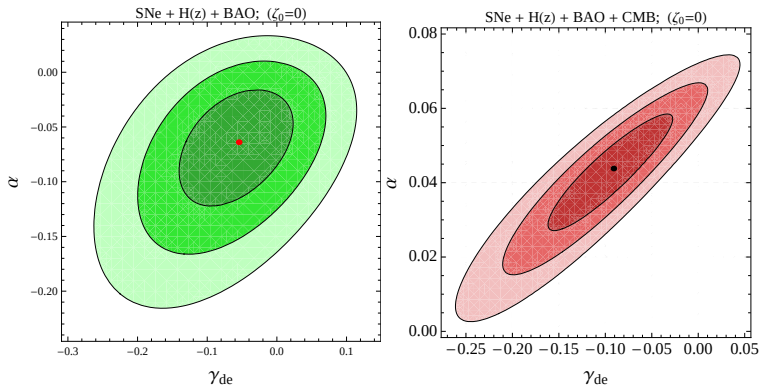
Modelo I: los valores mejor estimados son $\zeta_0 = -0.0066^{+0.016}_{-0.018}$, $\alpha = 0.0324 \pm 0.0011$, donde los errores están dados a 68.3% de confianza

Restricciones observacionales: Modelo I



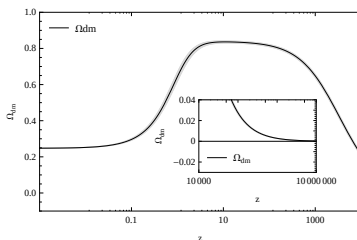
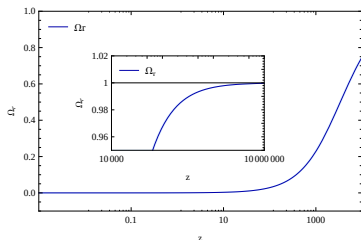
At high-redshift the contribution of the DM is about 2% for the best estimated values and, at 1σ the model can even describe a *wrong* RDE due to the unphysical values for $\Omega_r > 1$ and $\Omega_{dm} < 1$. The transition from the RDE to MDE (dark matter + baryons) occurs at $z_{eq} = 4607.80$ for the best estimated values. The error bands are given at 68.3% (1σ) of confidence level.

Restricciones observacionales: Modelo II



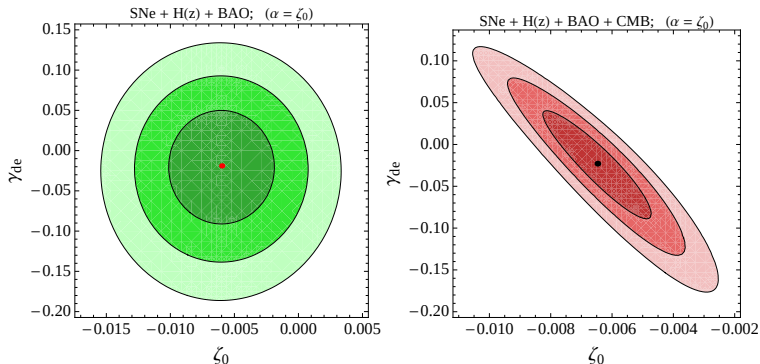
Modelo I: los valores mejor estimados son $\gamma_{de} = -0.0913^{+0.043}_{-0.046}$, $\alpha = 0.0438 \pm 0.010$, donde los errores están dados a 68.3% de confianza

Restricciones observacionales: Modelo II



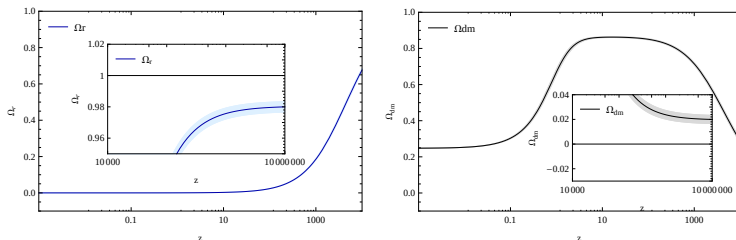
At high- z a true RDE is recovery with $\Omega_r \rightarrow 1$ and $\Omega_{dm} \rightarrow 0$. The transition from the radiation to the matter dominated (dark matter + baryons) epoch occurs at $z_{eq} = 3378.69$ for the best estimated values. The error bands are given at 68.3% (1σ) of confidence level.

Restricciones observacionales: Modelo III



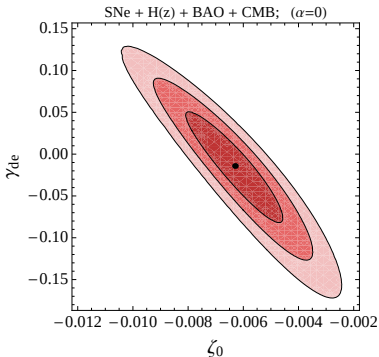
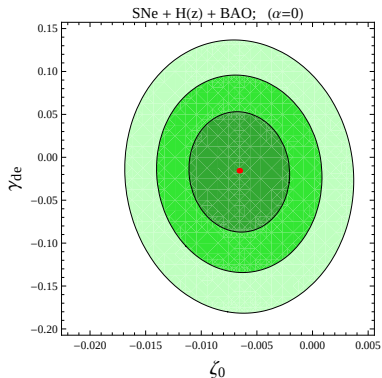
Modelo III: los valores mejor estimados son ($\zeta_0 = -0.0065 \pm 0.0011$, $\gamma_{de} = -0.023^{+0.042}_{-0.043}$), donde los errores están dados a 68.3% de confianza.

Restricciones observacionales: Modelo III



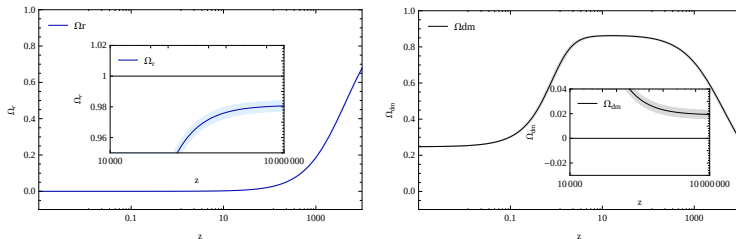
Once again the negatives values of the bulk viscosity leads to a non negligible contribution of the DM of about 2% at high-redshift. The transition from the radiation to the matter dominated (dark matter + baryons) era occurs at $z_{eq} = 4671.87$ for the best estimated values. The error bands are given at 68.3% (1σ) of confidence level.

Restricciones observacionales: Modelo IV



Modelo IV: los valores mejor estimados son $\zeta_0 = -0.0063 \pm 0.0011$, $\gamma_{de} = -0.014^{+0.043}_{-0.044}$, donde los errores están dados a 68.3% de confianza.

Restricciones observacionales: Modelo IV



Evolution of the dimensionless energy densities Ω_r and Ω_{dm} as a function of the redshift z for Model IV. At high-redshift the contribution of the DM is about 2%. The transition from RDE to MDE (dark matter + baryons) occurs at $z_{eq} = 4572.67$ for the best estimated values. The error bands are given at 68.3% (1σ) of confidence level.

Conclusiones

Análisis de sistemas dinámicos:

- la viscosidad de bulto necesita ser definida negativa para poder ser compatible con RDE y MDE, pero esto no es posible de acuerdo a LSLT.
- expansión acelerada compatible con valores negativos y positivos de la viscosidad

Análisis observacional

- valores negativos de la viscosidad de bulto son preferidos (1σ)
- set de datos de pequeños “redshift” parecen favorecer un valor positivo para la viscosidad, pero esto podría conducirnos a conclusiones erradas sobre la viabilidad del modelo

Índice barotrópico negativo $\rightarrow$ sugiere naturaleza fantasma de la energía oscura

Posibles colaboraciones.... 😊

- extender resultados para funciones de interacción totalmente arbitrarias: más allá de $z = z(x, y)$
- usar otras relaciones funcionales para la viscosidad como $\zeta = \zeta(\rho_r)$ o $\zeta = \zeta(\rho_{dm})$. Primeros pasos: *Hermano Velten et al* arXiv: 1307.4262
- ...