



PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATOLICA
DE VALPARAISO

85años
1928-2013

Análisis cualitativo de métricas Kantowski-Sachs en una clase genérica de modelos $f(R)$ [basado en 1007.3956, 1308.5921]

Dr. Genly León Torres

Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Email: genly.leon@ucv.cl

Contenido

Introducción

Formulación del modelo

Ecuaciones de campo

Análisis Dinámico: $f(R)$ genérico

Formalismo para la descripción física de las soluciones

Resultados más importantes del Análisis Dinámico

Discussion

Examples

Conclusiones

References

Introducción

- El universo observable es homogéneo e isotropico con gran exactitud [E. Komatsu *et al.*, 2010] ...
- El problema de la homegeneidad e isotropía del universo, en estricto rigor, no esta resuelto completamente! ... Se debería partir de una métrica arbitraria y mostrar que la inflacion tiene lugar borrando todas la inhomogeneidades y anisotropías $\implies$ isotropización asintótica (el universo evoluciona hacia la geometria FRW, de acuerdo a las observaciones).
- El problema completamente inhomogéneo solo puede enfrentarse numericamente [Goldwirth & Piran, 89 & 90; Deruelle & Goldwirth, 95], ... sin embargo con el objetivo de extraer soluciones analíticas se puede asumir otra hipotesis más: investigar cosmologías anisótropas pero homogéneas (ej: métricas Bianchi [Ellis & MacCallum, 1969; Tsagas, Challinor & Maartens, 2008] y Kantowski-Sachs [Kompaneets & Chernov, 1964; Kantowski & Sachs, 1966]).
- Se estudiarán especialmente los modelos Bianchi I, Bianchi III, y Kantowski-Sachs que son más simples pero muy interesantes

- Por otra parte, se sabe que el universo observable se expande aceleradamente [Perlmutter et al., 1999, Riess et al., 1998, Schmidt et al., 1998, Kowalski et al., 2008; Allen et al., 2008; Abazajian et al. 2009, Komatsu et al., 2011, Hinshaw et al., 2012, Ade et al., 2013], lo que ha llevado a los físicos a seguir dos caminos en la investigación teórica:
 1. Energía oscura, constante cosmológica, ingredientes exóticos de materia (ver [Copeland, Sami & Tsujikawa, 2006] y referencias) en el MI de las ecuaciones de campo, ó
 2. Modificar el MD de las ecuaciones $\implies$ modificar la teoría gravitacional en sí misma (ej. gravedad $f(R)$ [Sotiriou & Faraoni, 2008; De Felice & Tsujikawa, 2010] y referencias).

Aims

- Investigar la evolución de métricas Kantowski-Sachs en un universo gobernado por gravedad $f(R)$.
- Hacer el estudio de estabilidad de las soluciones de las EDO usando sistemas dinámicos para obtener condiciones generales que garanticen la estabilidad asintótica de soluciones bien motivadas físicamente, especialmente soluciones auto- aceleradas que permitan describir la etapa temprana de aceleración inflacionaria y la reciente etapa de expansión acelerada de la evolución cósmica.
- Discutir que teorías $f(R)$ permiten una evolución cósmica aceptable con una etapa de dominio de materia seguida de una etapa de expansión acelerada en correspondencia con el paradigma cosmológico moderno.
- soluciones con: expansión acelerada? comportamiento phantom? soluciones en contracción? soluciones de colapso y rebote? cosmología cíclica? isotropización futura?

Métrica

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + [e_1^1(t)]^{-2} dr^2 + [e_2^2(t)]^{-2} [d\vartheta^2 + S(\vartheta)^2 d\varphi^2], \quad (1)$$

donde $1/e_1^1(t)$ y $1/e_2^2(t)$ son los factores de escala [Leon & Saridakis, 2011]:.

$$S(\vartheta) = \begin{cases} \sin \vartheta & \text{for } k = +1(KS), \\ \vartheta & \text{for } k = 0(BI), \\ \sinh \vartheta & \text{for } k = -1(BIII), \end{cases} \quad (2)$$

Ecuaciones generalizadas del campo (*Formalismo Métrico Estándar*)

[Sotiriou & Faraoni, 2008; De Felice & Tsujikawa, 2010, Goheer, Goswami & Dunsby, 2009]:

$$f'(R)R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\square f'(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (3)$$

$$f'(R)R + 3\square f'(R) - 2f(R) = \kappa T; \quad T = T_\alpha^\alpha \quad (4)$$

Ecuaciones de campo: $f(R)$ genérico

$$\dot{H} = -H^2 - 2\sigma^2 - \frac{\rho_m}{3f'(R)} + \frac{f(R)}{6f'(R)} + \frac{1}{f'(R)}H \frac{d}{dt}f'(R). \quad (5)$$

$$\dot{\sigma} = -\sigma^2 - 3H\sigma + H^2 - \frac{\rho_m}{3f'(R)} - \frac{1}{6} \left[R - \frac{f(R)}{f'(R)} \right] + \frac{(H - \sigma)}{f'(R)} \frac{d}{dt}f'(R), \quad (6)$$

$$-3 \frac{d^2}{dt^2}f'(R) - 9H \frac{d}{dt}f'(R) + f'(R)R - 2f(R) = -\rho_m + 3p_m. \quad (7)$$

$$\left[H + \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt}f'(R)}{f'(R)} \right]^2 + \frac{1}{3} {}^2K = \sigma^2 + \frac{\rho_m}{3f'(R)} + \frac{1}{6} \left[R - \frac{f(R)}{f'(R)} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\frac{d}{dt}f'(R)}{f'(R)} \right]^2. \quad (8)$$

$$\dot{\rho}_m = -3\gamma H \rho_m, \quad (9)$$

$$\dot{{}^2K} = -2(\sigma + H)({}^2K). \quad (10)$$

$$\dot{e}_1^1 = (-H + 2\sigma)e_1^1. \quad (11)$$

$p_m = (\gamma - 1)\rho_m$, $1 \leq \gamma \leq 2$, $\sigma = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\ln \frac{e_1^1}{e_2^2} \right]$, $H = -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\ln e_1^1 (e_2^2)^2 \right]$, $K = (e_2^2)^2$ y $R = 12H^2 + 6\sigma^2 + 6\dot{H} + 2K$. Example: $f(R) = R^n$ [Leon & Saridakis, 2011].

Análisis Dinámico

Se definen de variables auxiliares adimensionales:

$$Q = \frac{H}{D}, \quad \Sigma = \frac{\sigma_+}{D}, \quad x = \frac{1}{2Df'(R)} \frac{df'(R)}{dt},$$
$$y = \frac{1}{6D^2} \left[R - \frac{f(R)}{f'(R)} \right], \quad z = \frac{\rho_m}{3D^2f'(R)}, \quad K = \frac{{}^2K}{3D^2}, \quad E_1^1 = \frac{e_1^1}{D}$$

donde

$$D = \sqrt{\frac{({}^2K)}{3} + \left(H + \frac{1}{2f'(R)} \frac{df'(R)}{dt} \right)^2} \equiv \sqrt{\frac{({}^2K)}{3} + \left(H + \frac{f''(R)}{2f'(R)} \frac{dR}{dt} \right)^2}. \quad (12)$$

y se definen las funciones de entrada:

$$m = \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{d \ln f'(R)}{d \ln R}, \quad r = -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln R}, \quad M = \frac{r(1+r+m)}{m} \quad (13)$$

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Partiendo de

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1 + m(r) + r)}{R}$$

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Partiendo de

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1 + m(r) + r)}{R}$$

Separando variables e integrando

$$R(r) = R_0 \exp \left[\int \frac{dr}{r(1 + m(r) + r)} \right]$$

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Partiendo de

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1 + m(r) + r)}{R}$$

Separando variables e integrando

$$R(r) = R_0 \exp \left[\int \frac{dr}{r(1 + m(r) + r)} \right]$$

Para obtener la función $f(R)$ en cuadraturas a partir de la función $m(r)$:

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Partiendo de

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1 + m(r) + r)}{R}$$

Separando variables e integrando

$$R(r) = R_0 \exp \left[\int \frac{dr}{r(1 + m(r) + r)} \right]$$

Para obtener la función $f(R)$ en cuadraturas a partir de la función $m(r)$:

Se parte de la definición de r :

$$r = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln R}$$

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Partiendo de

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1 + m(r) + r)}{R}$$

Separando variables e integrando

$$R(r) = R_0 \exp \left[\int \frac{dr}{r(1 + m(r) + r)} \right]$$

Para obtener la función $f(R)$ en cuadraturas a partir de la función $m(r)$:

Se parte de la definición de r :

$$r = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln R}$$

Agrupándose términos convenientemente, resulta

$$f(R) = f_0 \exp \left(- \int r d \ln R \right)$$

Reconstrucción de la función genérica $f(R)$

Partiendo de

$$\frac{dr}{dR} = \frac{r(1 + m(r) + r)}{R}$$

Separando variables e integrando

$$R(r) = R_0 \exp \left[\int \frac{dr}{r(1 + m(r) + r)} \right]$$

Para obtener la función $f(R)$ en cuadraturas a partir de la función $m(r)$:

Se parte de la definición de r :

$$r = -\frac{d \ln f(R)}{d \ln R}$$

Agrupándose términos convenientemente, resulta

$$f(R) = f_0 \exp \left(- \int r d \ln R \right)$$

Finalmente

$$f(r) = f_0 \exp \left(- \int \frac{1}{1 + m(r) + r} dr \right).$$

En la tabla se muestran para algunos modelos $f(R)$ usuales sus respectivas funciones $m(r)$ y $M(r)$.

En la tabla se muestran para algunos modelos $f(R)$ usuales sus respectivas funciones $m(r)$ y $M(r)$.

Modelos	$m(r)$	$M(r)$
αR^n	$-r - 1$	0
$R + \alpha R^n$	$\frac{n(1+r)}{r}$	$\frac{r(n+r)}{n}$
$R^p (\ln \alpha R)^q$	$\frac{p^2+2rp-qr^2+r^2-qr}{qr}$	$-\frac{r(p+r)^2}{-p^2-2rp+qr^2-r^2+qr}$
$R^p \exp(qR)$	$\frac{p-r^2}{r}$	$-\frac{r(p+r)}{r^2-p}$
$R^p \exp\left(\frac{q}{R}\right)$	$-\frac{r^2+2r+p}{r}$	$\frac{r(p+r)}{r^2+2r+p}$

Se puede reducir el sistema cosmológico bajo estudio a:

$$\begin{aligned}
 Q' &= -\frac{1}{2(1+r)} \{ 2(1+r) - 2(1+r)x^2 - 2ry + 2Q^3(1+r)\Sigma + 2(1+r)\Sigma^2 + \\
 &\quad + Q^2(1+r)(2 + 3x^2(-2 + \gamma) + 4x\Sigma - 6\Sigma^2 + 3\gamma(-1 + y + \Sigma^2)) + \\
 &\quad + Q(1+r)(-2\Sigma + x(-2 + 3x^2(-2 + \gamma) + 2x\Sigma - 6\Sigma^2 + \\
 &\quad + 3\gamma(-1 + y + \Sigma^2))) \} \\
 \Sigma' &= \frac{1}{2} \{ -2 + 2(Q+x)^2 - 3(Q+x)(2 + x^2(-2 + \gamma) + (-1 + y)\gamma)\Sigma - \\
 &\quad - 2(-1 + Q+x)(1 + Q+x)\Sigma^2 - 3(Q+x)(-2 + \gamma)\Sigma^3 \} \\
 x' &= -\frac{1}{2(1+r)} \{ -4 - 4r + 6Qx + 6Qrx + 10x^2 + 10rx^2 - 6Qx^3 - \\
 &\quad - 6Qrx^3 - 6x^4 - 6rx^4 + 2ry + 3\gamma + 3r\gamma - 3Qx\gamma - 3Qrx\gamma - \\
 &\quad - 6x^2\gamma - 6rx^2\gamma + 3Qx^3\gamma + 3Qrx^3\gamma + 3x^4\gamma + 3rx^4\gamma - 3y\gamma - 3ry\gamma + \\
 &\quad + 3Qxy\gamma + 3Qrx\gamma + 3x^2y\gamma + 3rx^2y\gamma + 2(1+r)x(-1 + Q + \\
 &\quad + x)(1 + Q+x)\Sigma + (1+r)(4 + 3x(Q+x)(-2 + \gamma) - 3\gamma)\Sigma^2 \} \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y} = & -\frac{1}{1+r} y \{3(1+r)x^3(-2+\gamma) + (1+r)x^2(3Q(-2+\gamma) + 2\Sigma) + \\ & + x(4+2r-3\gamma-3r\gamma+3y\gamma+3ry\gamma+4Q(1+r)\Sigma + \\ & + 3(1+r)(-2+\gamma)\Sigma^2) + (1+r)(-2\Sigma+Q(2(Q-3\Sigma)\Sigma + \\ & + 3\gamma(-1+y+\Sigma^2)))\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{r} = 2 M x \quad (16)$$

Obteniéndose 39 puntos críticos, de estos 30 se encuentran en el Espacio de Fase en el cual las nuevas ecuaciones dinámicas tienen sentido físico:

$$\begin{aligned} \Psi = & \{x^2 + y + \Sigma^2 \leq 1, |Q+x| \leq 1, x \in [-1, 1], y \in [0, 1], \Sigma \in [-1, 1], \\ & Q \in [-2, 2]\} \times \{r \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \quad (17)$$

Formalismo para la descripción física de las soluciones

Utilizando la ecuaciones (11), (10), (9) y la relación $d\tau = Ddt$ se obtienen las ecuaciones truncadas a primer orden [Leon & Saridakis, 2011]

$$e_1^{1'} = -(Q^* - 2\Sigma^*)e_1^1, \quad (18a)$$

$${}^2K' = -2(Q^* + \Sigma^*)^2 K, \quad (18b)$$

$$\rho_m' = -3\gamma Q^* \rho_m, \quad (18c)$$

$$R' = \frac{2x^* R}{m(r^*)} \quad (18d)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{D^*}. \quad (18e)$$

donde $*$ denota evaluación en un punto crítico dado y $'$ denota derivada con respecto a τ . y D^* la solución a primer orden de

$$D' = D \Upsilon^*$$

donde

$$\Upsilon^* = \frac{1}{2} \{ 2(x^* - \Sigma^*) + (Q^* + x^*) (3((\gamma - 2)(x^*)^2 + \gamma(y^* - 1)) + 2(Q^* + x^*)\Sigma^* + 3(\gamma - 2)(\Sigma^*)^2) \}. \quad (19)$$

Resolviendo (18e), (19) for $x^* \neq 0, y^* \neq 0, \Upsilon^* \neq 0, r^* \neq \{0, 1\}$, con condiciones iniciales $D(0) = D_0$ y $t(0) = t_0$ se obtiene [Leon & Saridakis, 2011]

$$e_1^1(t) = e_{10}^1 (\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{\frac{Q^* - 2\Sigma^*}{\Upsilon^*}}, \quad (20a)$$

$${}^2K(t) = {}^2K_0 (\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{\frac{2(Q^* + \Sigma^*)}{\Upsilon^*}}, \quad (20b)$$

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} (\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{\frac{3\Upsilon^* Q^*}{\Upsilon^*}}, \quad (20c)$$

$$R(t) = R_0 (\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{-\frac{2x^*}{m(r^*)\Upsilon^*}}. \quad (20d)$$

donde $\ell_1 = D_0 t_0 \Upsilon^* + 1$.

Additionally, we can introduce a length scale ℓ along the flow lines, describing the volume expansion (contraction) behavior of the congruence completely, via the standard relation, namely

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{1}{3}\Theta \equiv H \quad (21)$$

The length scale ℓ along the flow lines, defined in (21), can be expressed as:

$$\ell(t) = \ell_0 (\ell_1 - t\Upsilon^* D_0)^{-\frac{Q^*}{\Upsilon^*}}. \quad (22)$$

where $\ell_0 = [(e^1_{10})(^2K_0)]^{-\frac{1}{3}}$.

In summary, the expressions (20) and (22) determine the cosmological solution, that is the evolution of various quantities, at a critical point. In the particular case $\Upsilon^* \rightarrow 0^+$, $\ell_1 \rightarrow 1$, and using the algebraic fundamental limit, we obtain

$$e_1^1(t) = e_{10}^1 e^{-D_0(Q^*-2\Sigma^*)t}, \quad (23a)$$

$${}^2K(t) = {}^2K_0 e^{-2D_0(Q^*+\Sigma^*)t}, \quad (23b)$$

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} e^{-3\gamma D_0 Q^* t}, \quad (23c)$$

$$R(t) = R_0 e^{\frac{2D_0 x^* t}{m(r^*)}}, \quad (23d)$$

$$\ell(t) = \ell_0 e^{D_0 Q^* t}. \quad (23e)$$

In the simple cases $x^* = 0$ and $y^* = 0$, we obtain:

- If $y^* = 0$ and $r^* \neq \{0, 1\}$, $R = 0$.
- If $y^* = 0$ and $r^* = 1$, R is arbitrary.
- If $x^* = 0$, imply that $f'(R)$ is constant, this implies that $R = R_0$.

These relationships are obtained from the definitions of the dynamical variables and r . Finally, in the case $x^* = 0$, we have in general a transcendental equation for R :

$$r^* = -c \frac{R}{f(R)}. \quad (24)$$

where c is constant. Solving this relationship, the corresponding value of $R(r^*)$ is obtained.

Points	Υ^*	Solution
$P_6^+(r^*)$	$-\frac{3\gamma}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$	$\ell(t) = \ell_0 (\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{-\frac{2r^*}{3\gamma}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{\ell(t)}{\ell_0} \right]^{-3\gamma},$ $R(t) = \begin{cases} R_0 (\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{for } r^* \neq \{-\frac{3\gamma}{4}, -1\} \\ 0 & \text{for } r^* = -\frac{3\gamma}{4} \\ \text{arbitrary} & \text{for } r^* = -1 \end{cases}.$ Isotropic. Decelerated expansion. Unstable. It reduces to P_3^+ investigated in [Leon & Saridakis, 2011] for R^n-gravity, $r^* = -n, \gamma = \frac{2}{3}n$.
$P_6^-(r^*)$	$\frac{3\gamma}{3\gamma+(-2+3\gamma)r^*}$	$\ell(t) = \ell_0 (\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{-\frac{2r^*}{3\gamma}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{\ell(t)}{\ell_0} \right]^{-3\gamma},$ $R(t) = \begin{cases} R_0 (\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{\frac{2(1+r^*)}{m(r)}} & \text{for } r^* \neq \{-\frac{3\gamma}{4}, -1\} \\ 0 & \text{for } r^* = -\frac{3\gamma}{4} \\ \text{arbitrary} & \text{for } r^* = -1 \end{cases}.$ Isotropic. Accelerated contraction. Unstable. It reduces to P_3^- investigated in [Leon & Saridakis, 2011] for R^n-gravity, $r^* = -n, \gamma = \frac{2}{3}n$.
P_8^+	-3	$\ell(t) = \ell_0 (\ell_1 + 3D_0 t)^{\frac{1}{3}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} (\ell_1 + 3D_0 t)^{-\gamma}, \quad R(t) = 0.$ Dominated by anisotropy. Decelerated expansion. Total matter/energy mimics radiation.
P_8^-	3	$\ell(t) = \ell_0 (\ell_1 - 3D_0 t)^{\frac{1}{3}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} (\ell_1 - 3D_0 t)^{-\gamma}, \quad R(t) = 0.$ Dominated by anisotropy. Accelerated contraction. Total matter/energy mimics radiation.

Points	Υ^*	Solution
P_9^+	-3	$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 + 3D_0t)^{\frac{1}{3}}, \rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 + D_0t)^{-\gamma}, R(t) = 0.$ Dominated by anisotropy. Decelerated expansion. Total matter/energy mimics radiation.
P_9^-	3	$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 - 3D_0t)^{\frac{1}{3}}, \rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - 3D_0t)^{-\gamma}, R(t) = 0.$ Dominated by anisotropy. Accelerated expansion. Total matter/energy mimics radiation.
P_{10}^+	0	$\ell(t) = \ell_0 e^{D_0t}, \rho_m(t) = \rho_{m0} e^{-3D_0t\gamma}, R(t) = R_0.$ Isotropic. Accelerated de Sitter expansion. Constant curvature.
P_{10}^-	0	$\ell(t) = \ell_0 e^{-D_0t}, \rho_m(t) = \rho_{m0} e^{3D_0t\gamma}, R(t) = R_0.$ Isotropic. Exponential collapse. Constant curvature.
P_{11}^+	0	$\ell(t) = \ell_0 e^{\frac{D_0t}{2}}, \rho_m(t) = \rho_{m0} e^{-\frac{3}{2}D_0t\gamma}, R(t) = R_0$ Non-flat ($\Omega_k = -3$). Anisotropic. Accelerating de Sitter expansion. Constant curvature.
P_{11}^-	0	$\ell(t) = \ell_0 e^{-\frac{D_0t}{2}}, \rho_m(t) = \rho_{m0} e^{\frac{3}{2}D_0t\gamma}, R(t) = R_0$ Non-flat ($\Omega_k = -3$). Anisotropic. Exponential collapse. Constant curvature.

Points	Υ^*	Solution
$L^+(r^*)$	-4	$\ell(t) = \ell_0 \sqrt{\ell_1 + 4D_0 t}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 + 4D_0 t)^{-3\Upsilon/2}$, $R(t) = 0$. Expanding. Decelerated. Total matter/energy mimics radiation.
$L^-(r^*)$	4	$\ell(t) = \ell_0 \sqrt{\ell_1 - 4D_0 t}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - 4D_0 t)^{-3\Upsilon/2}$, $R(t) = 0$. Contracting. Accelerated. Total matter/energy mimics radiation.
$P_1^+(r^*), P_2^+(r^*)$	-3	$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 + 3D_0 t)^{1/3}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 + 3D_0 t)^{-\Upsilon}$, $R(t) = 0$ Dominated by anisotropy. Decelerated expansion. Total matter/energy mimics radiation.
$P_1^-(r^*), P_2^-(r^*)$,	3	$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 - 3D_0 t)^{1/3}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - 3D_0 t)^{-\Upsilon}$, $R(t) = 0$ Dominated by anisotropy. Contracting. Accelerating. Total matter/energy mimics radiation.
$C^+(r^*)$	$-3 - \sin u$	$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{-\frac{1+\sin u}{\Upsilon^*}}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{\frac{3\Upsilon(1+\sin u)}{\Upsilon^*}}$, $R(t) = 0$. Expanding. Decelerating. Total matter/energy mimics radiation.
$C^-(r^*)$	$3 - \sin u$	$\ell(t) = \ell_0(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{\frac{1-\sin u}{\Upsilon^*}}$, $\rho_m(t) = \rho_{m0}(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{\frac{3\Upsilon(-1+\sin u)}{\Upsilon^*}}$, $R(t) = 0$. Contracting. Accelerating. Total matter/energy mimics radiation.

Resultados más importantes del Análisis Dinámico

Los resultados más importantes que se derivan del análisis dinámico realizado son:

- Se obtuvieron condiciones suficientes para la existencia de atractores de pasado (Fuentes):
 - $L^+(r^*)$ es un repulsor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0$; ó $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) < 0$.
 - $N^+(r^*)$ es un repulsor local si $r^* < -1, M'(r^*) > 0$; ó $r^* > -\frac{1}{2}, M'(r^*) > 0$.
 - $A^-(r^*)$ es un repulsor si $-2 < r^* < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0$; ó $r^* < -2, M'(r^*) < 0$; ó $r^* > \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}), M'(r^*) < 0$.
 - El punto P_{10}^- es un repulsor para $M(-2) > 0$.

- Se obtuvieron condiciones suficientes para la existencia de atractores de futuro (Sumideros):

- $L^-(r^*)$ es un atractor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) < 0$; ó $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, r^* > -1, M'(r^*) < 0$.
- $N^-(r^*)$ es un atractor local si $r^* < -1, M'(r^*) > 0$; ó $r^* > -\frac{1}{2}, M'(r^*) > 0$.
- $A^+(r^*)$ es un atractor si $-2 < r^* < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0$; ó $r^* < -2, M'(r^*) < 0$; ó $r^* > \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}), M'(r^*) < 0$.
- El punto P_{10}^+ para $M(-2) > 0$ representa un atractor de futuro y específicamente si $M(-2) > \frac{9}{8}$ su comportamiento es tipo foco estable.

- Algunos puntos silla con variedad estable 4D de interés físico son:

□ $A^+(r^*)$ es silla con variedad 4D estable si:

$$-2 < r^* < \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0 \text{ o}$$

$$r^* < -2, M'(r^*) > 0 \text{ o}$$

$$r^* > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o}$$

$$\frac{5}{3} < \gamma \leq 2, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}) < r^* < -\frac{5}{4}, M'(r^*) > 0 \text{ o}$$

$$1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}) < r^* < \frac{-4 - 9\gamma}{4(1 + 3\gamma)} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{16 + 48\gamma + 9\gamma^2}{(1 + 3\gamma)^2}}, M'(r^*) > 0 \text{ o}$$

$$\frac{-4 - 9\gamma}{4(1 + 3\gamma)} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{16 + 48\gamma + 9\gamma^2}{(1 + 3\gamma)^2}} < r^* < \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}), M'(r^*) < 0$$

- $B^+(r^*)$ es silla con variedad 4D estable si:

$$1 \leq \gamma < \frac{4}{3}, -1 < r^* < -\frac{3\gamma}{4}, M'(r^*) < 0 \text{ o}$$

$$\frac{4}{3} < \gamma < \frac{5}{3}, -\frac{3\gamma}{4} < r^* < -1, M'(r^*) < 0$$

- $P_4^+(r^*)$ es silla con variedad 4D estable si:

$$-2 < r^* < \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, M'(r^*) > 0 \text{ o}$$

$$r^* < -2, M'(r^*) < 0 \text{ o}$$

$$r^* > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, M'(r^*) < 0$$

Discussion

Partiendo de la información que nos brinda la variable auxiliar Q y la dada por el parámetro de desaceleración (q) se puede caracterizar la solución cosmológica de acuerdo a:

Si $Q > 0$ y $q < 0$ ($q > 0$) el punto crítico representa a un universo en expansión acelerada (desacelerada).

Si $Q < 0$ y $q > 0$ ($q < 0$) el punto crítico representa a un universo que se contrae aceleradamente (desaceleradamente).

Adicionalmente si $w_{eff} < -1$, entonces el universo presenta fantasmas y por último, si $\Sigma^* = 0$ el punto crítico corresponde a un universo isotrópico (físicamente $\Omega_\sigma = 0$).

$$q = \frac{1-x(2Q+x)+\Sigma^2-r(-1+2Qx+x^2+y-\Sigma^2)}{Q^2(1+r)}, \quad w_{eff} = \frac{1}{3} + \frac{2ry}{3(1+r)(-1+2Qx+x^2+\Sigma^2)}.$$

Un universo **viable observacionalmente**, debe tener:

Un universo **viable observacionalmente**, debe tener:

Una
Época de
expansión
acelerada

Un universo **viable observacionalmente**, debe tener:

Una
Época de
expansión
acelerada

Precedida de
una
Época de
dominio de
Materia

De los posibles atractores de futuro que representan soluciones cosmológicas en expansión acelerada se puede definir las siguientes regiones (**asumimos** $1 \leq \gamma \leq 2$)

- **[I:]** $r^* < -2$, $M'(r^*) < 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor comportándose como un campo fantasma ($w_{eff} < -1$).
- **[II:]** $M'(-2) > 0$. En esta región P_{10}^+ es el atractor comportándose como una solución *de Sitter*.
- **[III:]** $-2 < r^* < -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$, $M'(r^*) > 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor.
- **[IV:]** $r^* > \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3})$, $M'(r^*) < 0$. En esta región $A^+(r^*)$ es el atractor.

Los puntos críticos $P_6^+(r^*)$ y $B^+(r^*)$ pueden presentar soluciones cosmológicas con dominio de materia $\Omega_m = 1$, siendo ambos puntos tipo sillas y generando tres regiones para la existencia de una etapa transiente de dominio de materia.

- [V:] $1 \leq \gamma \leq 2$, $r^* \rightarrow -1$. En este caso $P_6^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

- [VI:] $1 \leq \gamma \leq 1,8$, $r^* = -\frac{3\gamma}{4+6\gamma}$, $M'(r^*) = 0$. En este caso $P_6^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

[VII:] $\gamma = \frac{4}{3}$, $M(r^*) = 0$. En este caso $B^+(r^*)$ representa un universo dominado por materia.

Gravedad Cuadrática

Para ilustrar los resultados analíticos discutidos con anterioridad se exponen los resultados obtenidos para el modelo de Gravedad Cuadrática, siguiendo el algoritmo presentado con anterioridad:

$$f(R)=R + \alpha R^2$$

$$M(r)=\frac{1}{2}r(r + 2)$$

Gravedad Cuadrática

Para ilustrar los resultados analíticos discutidos con anterioridad se exponen los resultados obtenidos para el modelo de Gravedad Cuadrática, siguiendo el algoritmo presentado con anterioridad:

$$f(R)=R + \alpha R^2$$

$$M(r)=\frac{1}{2}r(r + 2)$$

$$I^{**}$$

$$M'(0)=1$$

$$M'(-2)=-1$$

Fueron obtenidas condiciones suficientes para la existencia de atractores de pasado:

- $L^+(-2)$ es un repulsor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}$.
- $N^+(0)$ es siempre un repulsor local.

Fueron obtenidas condiciones suficientes para la existencia de atractores de futuro:

- $L^-(-2)$ es un atractor local si $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}$.
- $N^-(0)$ es siempre un atractor local.
- El punto P_{10}^+ para $M(-2) > 0$ representa un atractor de futuro y específicamente si $M(-2) > \frac{9}{8}$ su comportamiento es tipo foco estable.

Observables básicos de los puntos:

$$L^\pm(r^*) \implies \ell(t) = \ell_0 \sqrt{\ell_1 \pm 4D_0 t}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} (\ell_1 \pm 4D_0 t)^{-3\gamma/2} \text{ y } R(t) = 0$$

$$P_{10}^+ \implies \ell(t) = \ell_0 e^{D_0 t}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} e^{-3D_0 t \gamma} \text{ y } R(t) = R_0, \text{ ambos con } \Omega_{curvfl} = 1$$

Algunos puntos sillas de interés físico son:

- $A^-(-2)$ es no hiperbólico con una variedad inestable 4D cuando $r \rightarrow (-2)^-$. Se prueba que la variedad central es estable. Luego es de tipo silla.
- $A^+(-2)$ no hiperbólico con una variedad estable 4D cuando $r \rightarrow (-2)^-$. Se prueba que la variedad central es inestable. Luego es de tipo silla.
- $A^+(0)$ es silla con una variedad estable 3D y una variedad inestable 2D.
- $P_4^+(-2)$ es silla con una variedad estable 3D y una variedad inestable 1D.

Observables básicos de los puntos:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \ell(t) = \ell_0 \sqrt{(\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)}, \\
 &R(t) = R_0 (\ell_1 - D_0 \Upsilon^* t)^{2/m(0)}, \text{ para } r^* = 0 \\
 &\Rightarrow \ell(t) = \ell_0 e^{\pm D_0 t}, \quad R(t) = R_0, \text{ para } r^* = -2 \\
 &\text{con } \rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{\ell(t)}{\ell_0} \right]^{-3\gamma} \text{ y } \Upsilon^* = \mp 2/3 \\
 &\text{ambos con } \Omega_{curvfl} = 1
 \end{aligned}$$

$$P_4^+(-2) \Rightarrow \ell_0 e^{\frac{D_0 t}{2}}, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{\ell(t)}{\ell_0} \right]^{-3\gamma} \text{ y } R_0, \text{ con } \Omega_m = 0$$

Luego se procede a realizar el análisis de estos puntos críticos de interés físico, para identificar la existencia o no de puntos dominados por la materia (V-VII) o en expansión acelerada (I-IV). **Notándose que no existen puntos de dominio de materia.**

Notándose

El punto ($A^+(-2)$) corresponde a una solución tipo *de Sitter* (**región II** encontrada), se demuestra que dicha solución es localmente asintóticamente inestable (punto silla) independientemente del valor de gamma.

Este resultado tiene una gran importancia práctica ya que dicha solución cosmológica podría representar la etapa de aceleración del universo temprano asociada con la inflación primordial.

$$\text{Model } f(R) = R^p \exp(qR)$$

In this case $M(r) = \frac{r(p+r)}{p-r^2}$, $r^* \in \{0, -p\}$, $M'(0) = 1$ and $M'(-p) = \frac{1}{-1+p}$.

- $L^+(-p)$ ($L^-(-p)$) is a local past (future)-attractor for $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, p < 1$.
- $N^+(0)$ ($N^-(0)$) is always a local past (future)-attractor
- $N^+(-p)$ ($N^-(-p)$) is a local past (future)-attractor for $p > 1$
- $A^-(-p)$ ($A^+(-p)$) is a past (future)-attractor for $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < p < 2$ or $p < \frac{(1-\sqrt{3})}{2}$.
- The point P_{10}^- (P_{10}^+) is a past (future)-attractor if $2 < p < 4$, specially if $2,72 < p < 4$, the critical point P_{10}^+ is a stable focus.
- $A^+(-p)$ is a saddle point with a 4D stable manifold for $p > 2$ or $\frac{5}{3} < \gamma \leq 2$, $\frac{5}{4} < p < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ or $1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$, $\frac{1}{4} \left(\frac{4+9\gamma}{1+3\gamma} + \sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}} \right) < p < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
- $B^+(-p)$ is a saddle point with a 4D stable manifold for $p < 1$, $1 \leq \gamma < \frac{4p}{3}$.
- $P_4^+(-p)$ is a saddle point with a 4D stable manifold for $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < p < 2$ or $p < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

The function $M(r)$ satisfy the following:

- it connects the matter-dominated region VII with the region II where the accelerated solution is a de Sitter solution provided $\gamma = \frac{4}{3}$, $2 < p < 4$.
- it connects the matter-dominated region VII with the region III corresponding to an accelerated expansion provided $\gamma = \frac{4}{3}$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < p < 2$.
- it connects the matter-dominated region VII with the region IV corresponding to an accelerated expansion provided $\gamma = \frac{4}{3}$, $p < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Model } f(R) = R^p \exp\left(\frac{q}{R}\right).$$

In this case $M(r) = \frac{r(p+r)}{r^2+2r+p}$, $r^* \in \{0, -p\}$, $M'(0) = 1$ and $M'(-p) = \frac{1}{1-p}$.

- $L^+(-p)$ ($L^-(-p)$) is a local past (future)-attractor for $1 \leq \gamma < \frac{5}{3}, p > \frac{5}{4}$.
- $N^+(0)$ ($N^-(0)$) is always a past (future)-attractor
- $N^+(-p)$ ($N^-(-p)$) is a local past (future)-attractor for $p < \frac{1}{2}$
- $A^-(-p)$ ($A^+(-p)$) is a past (future)-attractor for $p > 2$.
- The point P_{10}^- (P_{10}^+) is a past (future)-attractor for $0 < p < 2$. Particularly, for $0 < p < 1, 28$, the critical point P_{10}^+ is a stable focus.
- $A^+(-p)$ is a saddle with a 4D stable manifold for $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < p < 2$ or $p < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ or $1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} < p < \frac{1}{4} \left(\frac{4+9\gamma}{1+3\gamma} - \sqrt{\frac{16+48\gamma+9\gamma^2}{(1+3\gamma)^2}} \right)$.
- $B^+(-p)$ is a saddle point with a 4D stable manifold for $p > 1, \frac{4p}{3} < \gamma < \frac{5}{3}$.
- $P_4^+(-p)$ is a saddle point with a 4D stable for $p > 2$.

The function $M(r)$ satisfy the following:

- it connects the matter-dominated region V with the region II corresponding to a de Sitter accelerated solution for $p \rightarrow 1$.
- it connects the matter-dominated region VII with the region II corresponding to a de Sitter accelerated solution for $\gamma = \frac{4}{3}$, $0 < p < 2$.
- it connects the matter-dominated region VII with the region I corresponding to an accelerated phantom phase for $\gamma = \frac{4}{3}$, $p > 2$.

$$\text{Model } f(R) = R^p (\ln \alpha R)^q$$

In this case $M(r) = \frac{r(p+r)^2}{(p+r)^2 - r(r+1)q}$, $r^* \in \{0, -p\}$, $M'(0) = 1$ and $M'(-p) = 0$.

- The sufficient conditions for the existence of past-attractors (future-attractors) are:
 - $N^+(0)$ ($N^-(0)$) is always a local past (future)-attractor.

The function $M(r)$ satisfy the following:

- it connects the matter-dominated region V with the region II associated to accelerated de Sitter expansion provided $p \rightarrow 1$ and $q > \frac{1}{2}$.
- it connects the matter-dominated region VII with the region II associated to accelerated de Sitter expansion provided $\gamma = \frac{4}{3}$, $p \neq 2$, $q > \frac{(-2+p)^2}{2}$.

Kantowski-Sachs geometry in R^n gravity

Cr./Curve	Q	Σ	x	y	Existence	Stability
$\mathcal{N}_+$	0	0	1	0	always	unstable
$\mathcal{N}_-$	0	0	-1	0	always	stable
$\mathcal{L}_+$	2	0	-1	0	always	unstable for $1, 2, 5 \leq n \leq 2, 5$
$\mathcal{L}_-$	-2	0	1	0	always	stable for $1, 2, 5 \leq n \leq 2, 5$
P_1^+	1	1	0	0	$1 < n \leq 3$	non-hyperbolic 3D unstable manifold
P_1^-	-1	-1	0	0	$1 < n \leq 3$	non-hyperbolic 3D stable manifold
P_2^+	1	-1	0	0	$1 < n \leq 3$	non-hyperbolic 3D unstable manifold
P_2^-	-1	1	0	0	$1 < n \leq 3$	non-hyperbolic 3D stable manifold
$\mathcal{C}_+$	$1 + \sin u$	$\cos u$	$-\sin u$	0	always	unstable for $1, 2, 5 \leq n \leq 2, 5$
$\mathcal{C}_-$	$-1 + \sin u$	$\cos u$	$-\sin u$	0	always	stable for $1, 2, 5 \leq n \leq 2, 5$

- No part of C_+ (C_-) is a stable (unstable). Thus, any part of C_+ (C_-) is either unstable (stable) or saddle.
- For $-\frac{1}{3} < w \leq -\frac{1}{6}$, one branch of C_- ($\frac{3(3w+1)}{3w-1} < \sin(u) \leq 1$) is stable, and one branch of C_+ ($\frac{3(3w+1)}{3w-1} < \sin(-u) \leq 1$) is unstable.
- For $-\frac{1}{6} < w < \frac{2}{3}$, the whole C_- is stable and the whole C_+ is unstable.
- For $\frac{2}{3} \leq w \leq 1$, one branch of C_- ($\frac{3(w-1)}{3w-1} < \sin(u) \leq 1$) is stable, and one branch of C_+ ($\frac{3(w-1)}{3w-1} < \sin(-u) \leq 1$) is unstable.

The curves C_ϵ contain the representative critical points

$\mathcal{N}_\epsilon := (Q = 0, \Sigma = 0, x = \epsilon, y = 0)$ and $\mathcal{L}_\epsilon := (Q = 2\epsilon, \Sigma = 0, x = -\epsilon, y = 0)$

described in [Goheer, Goswami & Dunsby, 2009]. Additionally to the investigation of [Goheer, Goswami & Dunsby, 2009], we obtain four new critical points, which are a pure result of the anisotropy:

$P_1^\epsilon := (Q = \epsilon, \Sigma = \epsilon, x = 0, y = 0)$ and $P_2^\epsilon := (Q = \epsilon, \Sigma = -\epsilon, x = 0, y = 0)$.

- For $-\frac{1}{6} < w < \frac{2}{3}$, $\mathcal{L}_+$ is unstable and $\mathcal{L}_-$ is stable. The critical point $\mathcal{N}_+$ ($\mathcal{N}_-$) is always unstable (stable) except in the case $w = -\frac{1}{3}$. These results match with the results obtained in [Goheer, Goswami & Dunsby, 2009].
- The critical points P_1^ϵ and P_2^ϵ exist always. They are non-hyperbolic, presenting an 1-dimensional center manifold tangent to the line $x + Q = 0$. $P_{1,2}^-$ ($P_{1,2}^+$) have a 3D stable (unstable) manifold provided $-\frac{1}{3} < w < 1$.

The isolated critical points of the cosmological system. We use the notations $n_+ = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1,37$, $Q^* = \frac{2n^2-5n+5}{7n^2-16n+10}$, $\Sigma^* = -\frac{2n^2-2n-1}{7n^2-16n+10}$, $x^* = \frac{3(n-1)(n-2)}{7n^2-16n+10}$, and $y^* = \frac{9(4n^2-10n+7)(n-1)^2}{(7n^2-16n+10)^2}$

Cr. P.	Q	Σ	x	y	Existence
$\mathcal{A}_+$	$\frac{2n-1}{3(n-1)}$	0	$\frac{n-2}{3(n-1)}$	$\frac{(2n-1)(4n-5)}{9(n-1)^2}$	$1,25 \leq n \leq 3$
$\mathcal{A}_-$	$-\frac{2n-1}{3(n-1)}$	0	$-\frac{n-2}{3(n-1)}$	$\frac{(2n-1)(4n-5)}{9(n-1)^2}$	$1,25 \leq n \leq 3$
$\mathcal{B}_+$	$\frac{1}{3-n}$	0	$\frac{n-2}{n-3}$	0	$1 < n \leq 2,5$
$\mathcal{B}_-$	$-\frac{1}{3-n}$	0	$-\frac{n-2}{n-3}$	0	$1 < n \leq 2,5$
P_3^+	$\frac{1}{2-n}$	0	$-\frac{n-1}{2-n}$	$\frac{n-1}{n(n-2)^2}$	$1 < n \leq n_+$
P_4^+	Q^*	Σ^*	x^*	y^*	$n_+ \leq n \leq 3$
P_4^-	$-Q^*$	$-\Sigma^*$	$-x^*$	y^*	$n_+ \leq n \leq 3$
P_5^+	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{\sqrt{2n-5}}{n-2}$	$\frac{n-3}{n-2}$	0	$2,5 \leq n \leq 3$
P_5^-	$-\frac{1}{n-2}$	$\frac{\sqrt{2n-5}}{n-2}$	$-\frac{n-3}{n-2}$	0	$2,5 \leq n \leq 3$

- The two critical points $\mathcal{A}_\epsilon$ exist for $-\frac{1}{6} \leq w \leq 1$. The critical point $\mathcal{A}_+$ ($\mathcal{A}_-$) is a sink, that is a stable one (source, that is an unstable) provided $w_+ < w \leq 1$, where $w_+ = \frac{1}{3}(-2 + \sqrt{3}) \approx -0,09$. Otherwise they are saddle points. Equivalently, we can express the stability intervals in terms of n , using the relation $n = 3(w + 1)/2$. Thus, the aforementioned interval becomes $n_+ < n \leq 3$, where $n_+ = 3(w_+ + 1)/2 \approx 1,37$.
- The critical points $\mathcal{B}_\epsilon$ exist for $-\frac{1}{3} \leq w \leq \frac{2}{3}$. Thus, they are always saddle points having a 2-dimensional stable manifold and a 2-dimensional unstable manifold if $-\frac{1}{3} < w < \frac{2}{3}$.
- The critical points P_3^ϵ exist for $-\frac{1}{3} \leq w \leq w_+$. They are non-hyperbolic, and due to the 1-dimensional center manifold, the stable (unstable) manifold of P_3^+ (P_3^-) is 3D for $-\frac{1}{3} < w < w_+$.
- The critical points P_4^ϵ exist for $w_+ \leq w \leq 1$. P_4^+ (P_4^-) has a 3D stable (unstable) manifold and a 1D unstable (stable) manifold provided $w_+ < w \leq 1$. Thus, they are always saddle points.
- The critical points P_5^ϵ exist for $\frac{2}{3} \leq w \leq 1$. They are non-hyperbolic, there exists a 2D center manifold and P_5^+ (P_5^-) has a 2D unstable (stable) manifold.

Relevant results discussed in [Leon & Saridakis, 2011] concerning the late-time solutions

- For $1,37 \lesssim n < 3$, the universe at late times can result to a state of accelerating expansion represented in the phase space by the critical point $\mathcal{A}_+$. For $2 < n < 3$ it exhibits phantom behavior. Moreover, in the case of radiation ($n = 2, w = 1/3$) the aforementioned stable solution corresponds to a de-Sitter expansion describing the inflationary epoch of the universe.
- In the above critical point the isotropization has been achieved. The acquisition of such a solution is of great interest, as of many works on anisotropic cosmologies, since, it is the only robust approach in confronting isotropy of standard cosmology. The fact that this solution is accompanied by acceleration or phantom behavior, makes it a very good candidate for the description of the observable universe.
- In this scenario there are also contracting solutions, either accelerating or decelerating, which are, in general, not globally but locally asymptotically stable. For $2 < n < 3$, the critical points $P_{2,1}^- (Q = -1, \Sigma = \pm 1, x = 0, y = 0)$ correspond to accelerating contraction, in which the total matter/energy behaves like radiation. They do possess a 3D stable manifold and their center manifolds are locally asymptotically stable, and thus they can attract the universe at late times (with small probability) for this n -range.

Heteroclinic sequences in the case of dust matter ($w = 0, n = 3/2$).

There exist heteroclinic sequences of types

$$\begin{aligned} Q_1^+ &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}^- \longrightarrow \mathcal{L}_- \\ \mathcal{B}^- \longrightarrow P_1^- \\ Q_1^- \end{array} \right. \\ \mathcal{L}_+ &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}^+ \longrightarrow Q_1^- \\ Q_2^- \end{array} \right. \\ P_1^+ &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}^+ \longrightarrow Q_1^- \\ P_2^- \end{array} \right. \\ P_2^+ &\longrightarrow P_1^- \\ Q_2^+ &\longrightarrow \mathcal{L}_-. \end{aligned} \tag{25}$$

They reveal

- that we can have the transition from expansion to contraction and vice versa. This is just a cosmological turnaround and a cosmological bounce, and their realization in the present scenario reveals the capabilities of the model.

Heteroclinic sequences in the case of radiation ($w = 1/3, n = 2$).

There exist heteroclinic sequences of types

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_- &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_4^- \longrightarrow P_4^+ \longrightarrow \mathcal{A}_+ \\ \mathcal{B}^- \end{array} \right. \\
 \mathcal{B}_+ &\longrightarrow \mathcal{A}_+ \\
 P_1^- &\longrightarrow P_4^+ \longrightarrow P_2^+, P_2^- \longrightarrow P_4^- \longrightarrow P_1^+, \\
 P_1^+ &\longrightarrow P_2^-, P_2^+ \longrightarrow P_1^-,
 \end{aligned} \tag{26}$$

revealing

- the realization of a cosmological bounce or a cosmological turnaround. The existence of an heteroclinic sequence of type $\mathcal{A}_- \longrightarrow P_4^- \longrightarrow P_4^+ \longrightarrow \mathcal{A}_+$, correspond to the transition from collapsing AdS to expanding dS phase, that is we obtain a cosmological bounce followed by a de Sitter expansion, which could describe the inflationary stage. This significant behavior is a pure result of the anisotropy and reveals the capabilities of the scenario.
- the eternal transition $P_1^- \longrightarrow P_2^+ \longrightarrow P_1^- \longrightarrow P_2^+ \cdots$ is just the realization of cyclic cosmology.

Numerical simulations

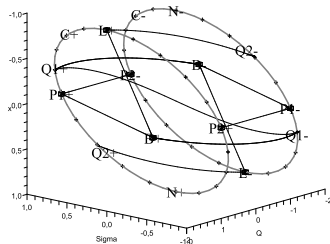


Fig 1. Projection of the phase space on the invariant set $y = 0$, in the case of dust matter ($w = 0, n = 3/2$). All the points in the circle C_+ are unstable whereas all the points in the circle C_- are stable. The heteroclinic sequences reveal the possible transition from expansion to contraction and vice versa

Numerical simulations

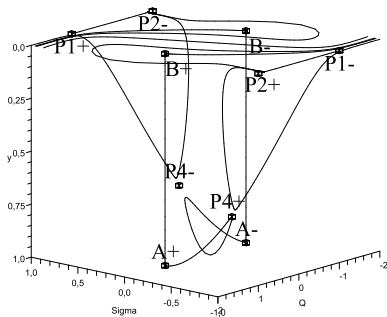


Fig 2. Projection of the phase space on the invariant set $x = 0$, in the case of radiation ($w = 1/3, n = 2$). There is one orbit of type $\mathcal{B}_+ \rightarrow \mathcal{A}_+$ and one of type $\mathcal{A}_- \rightarrow \mathcal{B}_-$. The existence of an heteroclinic sequence of type $\mathcal{A}_- \rightarrow P_4^- \rightarrow P_4^+ \rightarrow \mathcal{A}_+$ corresponds to a cosmological bounce.

- The universe at late times can result to a state of accelerating expansion, and, for $2 < n < 3$ it exhibits phantom behavior.
- Additionally, the universe has been isotropized, independently of the anisotropy degree of the initial conditions, and it asymptotically becomes flat.
- In the case of radiation ($n = 2$, $w = 1/3$) the aforementioned stable solution corresponds to a de-Sitter expansion, and it can also describe the inflationary epoch of the universe. In our work we extracted our results without relying at all on the cosmic no-hair theorem, which is a significant advantage of the analysis
- The Kantowski-Sachs anisotropic R^n -gravity can also lead to contracting solutions, either accelerating or decelerating, which are not globally stable.
- There is the possibility of the realization of the transition between expanding and contracting solutions during the evolution. That is, the scenario at hand can exhibit the cosmological bounce or turnaround. Additionally, there can also appear an eternal transition between expanding and contracting phases, that is we can obtain cyclic cosmology. These features can be of great significance for cosmology, since they are desirable in order for a model to be free of past or future singularities.

Conclusiones

- 1 Se extendieron los resultados para el caso $f(R) = R + \alpha R^2$ presentados en “Phase-space of flat Friedmann-Robertson-Walker models with both a scalar field coupled to matter and radiation”, G. León, P. Silveira, C.R. Fadrugas, 2010, para métricas Kantowsky-Sachs. El análisis de estabilidad de la variedad central correspondiente $A^+(-2)$ arrojó el carácter localmente asintóticamente inestable (punto silla) del punto de equilibrio correspondiente a la fase *de Sitter* (región II).
- 2 Se generalizaron los resultados presentados en “Dynamics of the anisotropic Kantowsky-Sachs geometries in R^n gravity,” G. León, E. N. Saridakis, 2011 a marcos $f(R)$ genéricos, al obtenerse una familia de puntos críticos equivalentes a los obtenidos en dicha referencia poseyendo el mismo comportamiento dinámico.

- 3 Se formalizó una generalización del procedimiento geométrico presentado en “Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models”, L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, S. Tsujikawa, 2006 para métricas FRW, determinándose regiones en el espacio $(\gamma, r, M'(r))$ en las cuales se tienen fases de dominio de materia (regiones V-VII) y fases de expansión acelerada (regiones I-IV) determinándose cuales condiciones son requeridas para que un modelo sea cosmológicamente viable (en el sentido discutido en L. Amendola y col.).

- 4 Se diseñó una metodología para la reconstrucción de la función $f(R)$ a partir de la función de entrada $m(r)$. Dicha función debe satisfacer un grupo de requisitos desde el punto de vista matemático que se imponen para obtener atractores de futuro isótopos en expansión acelerada precedidos de una etapa transiente de dominio de materia. A dichas funciones de entrada $m(r)$ se les imponen condiciones adicionales que surgen a partir de las restricciones que deben satisfacer las funciones $f(R)$ reconstruidas que provean un cuadro físico coherente.

References

-  E. Komatsu *et al.*, arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO].
-  D. S. Goldwirth and T. Piran, Phys. Rev. D **40**, 3263 (1989); Phys. Rev. Lett. **64**, 2852 (1990); N. Deruelle and D. S. Goldwirth, Phys. Rev. D **51**, 1563 (1995).
-  G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum, Commun. Math. Phys. **12**, 108 (1969).
C. G. Tsagas, A. Challinor and R. Maartens, Phys. Rept. **465**, 61 (2008).
-  A.S. Kompaneets and A.S. Chernov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1939 (1964);
R. Kantowski and R. K. Sachs, J. Math. Phys. **7** (1966) 443.
-  S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration],
Astrophys. J. **517**, (1999) 565
-  Adam G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron.J.* **116**
(1998) 1009–1038
-  Brian P. Schmidt *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astrophys.J.*
507 (1998) 46–63,

-  M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* **686**, 749 (2008); S. W. Allen, D. A. Rapetti, R. W. Schmidt, H. Ebeling, G. Morris and A. C. Fabian, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **383**, 879 (2008); K. N. Abazajian *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **182**, 543 (2009);
-  E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 18
-  G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results* [arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO]].
-  P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], [arXiv:1303.5084 [astro-ph.CO]].
-  E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
-  T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010); A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010)
-  G. Leon, E. N. Saridakis, *Class. Quant. Grav.* **28**, 065008 (2011).
-  N. Goheer, R. Goswami and P. K. S. Dunsby, *Class. Quant. Grav.* **26**, 105003 (2009).