

Intermediate inflation in the generalized Chaplygin gas universe model and on the brane

Nelson Videla M.

Instituto de Física P.U.C.V

Concepción, 15 de Marzo 2013

- El Principio Cosmológico más la Teoría de la Relatividad General conducen al modelo estándar de la expansión cosmológica.
- Las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General son escritas como la ecuación tensorial

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1)$$

- Para un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, la métrica $g_{\mu\nu}$ debe ser la métrica de Robertson-Walker. En un sistema de coordenadas determinado, el elemento de línea se escribe

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \bar{k}r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2)$$

- El contenido de materia/energía del Universo es usualmente asumido como un fluido perfecto con densidad de energía ρ y presión p . Usando la misma elección de coordenadas, el tensor de energía-momentum para este fluido perfecto es

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (3)$$

- Las ecuaciones de Einstein, junto con la métrica de Robertson-Walker y el tensor de energía-momentum, conducen a las siguientes ecuaciones:
 - La ecuación de Friedmann describe la tasa de expansión

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\bar{k}}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (4)$$

-La ecuación de aceleración nos dice si la expansión es acelerada o desacelerada

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (5)$$

-Al combinar las ecuaciones de Friedmann y de aceleración se obtiene la ecuación de continuidad, la cual representa la conservación de la energía

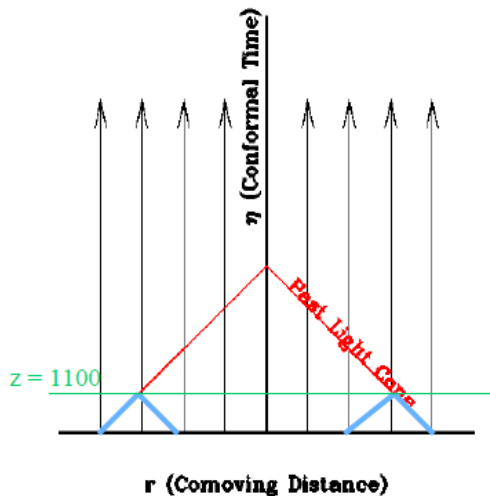
$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (6)$$

- Si conocemos la densidad y presión de los constituyentes del Universo, éstas ecuaciones nos permiten describir la evolución de éste.

Problemas del Modelo Cosmológico Estándar

- Existen 3 evidencias empíricas importantes que apoyan la teoría cosmológica del Big Bang:
 - Ley de Hubble*
 - Radiación cósmica de fondo*
 - Abundancia de elementos ligeros*
- Sin embargo cuando estudiamos el Universo en sus épocas mas tempranas surgen algunos problemas:
 - Problema del Horizonte*
 - Problema de Planitud*
 - Origen de las estructuras a gran escala en el Universo*
 - Problema del Monopolo*

Problema del Horizonte



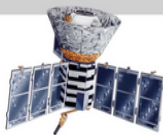
1965



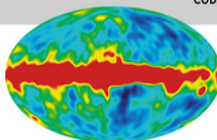
Penzias and
Wilson



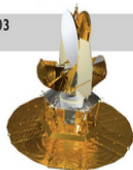
1992



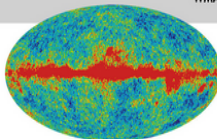
COBE



2003



WMAP



Idea de la cosmología inflacionaria

- Los problemas de la cosmología estándar del Big Bang son consecuencia del hecho que el Universo siempre presenta una expansión desacelerada.
- Supongamos la existencia de una etapa en el Universo temprano donde éste presenta una expansión acelerada, es decir

$$\ddot{a} > 0. \quad (7)$$

- De la ecuación de aceleración (5) se obtiene la condición

$$\rho + 3p < 0. \quad (8)$$

- Esto corresponde a la violación de la condición de energía fuerte.

- Surge la pregunta acerca de la naturaleza de la fuente de energía que impulsa esta expansión acelerada.
- La forma más simple de lograr tal efecto antigравitacional es por la presencia de un campo escalar homogéneo, ϕ , con algún potencial de autointeracción $V(\phi) \geq 0$. En un Universo FRW el campo es equivalente a un fluido perfecto con densidad de energía y presión dada por

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (9)$$

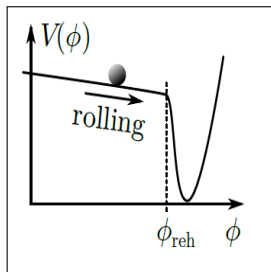
$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (10)$$

- Durante inflación el término de curvatura de la ecuación de Friedmann se vuelve rápidamente despreciable, y despreciamos la constante cosmológica. Para la ecuación de Friedmann y de continuidad obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (11)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (12)$$

- La condición para inflación requiere que $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, o clásicamente que la energía potencial del inflatón domina sobre la energía cinética.



- Si imponemos condiciones ligeramente más fuertes sobre el campo escalar, las ecuaciones son mucho más fáciles de resolver. Estas son las condiciones de *slow-roll*

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi), \quad (13)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|.$$

- Estas condiciones son usadas para establecer constraints sobre los *parámetros de slow-roll*, definidos como

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (14)$$

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{H}}{H\dot{H}}. \quad (15)$$

- Se puede verificar que las aproximaciones de *slow-roll* son válidas cuando $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$.
- La cantidad de inflación es cuantificada por el número de e-foldings N , donde un e-folding es un incremento en el tamaño del Universo por un factor de e . Entonces

$$N = \int_{t_1}^{t_2} H dt.$$

- Para investigar modelos de inflación con más detalle, y para contrastar las predicciones teóricas con observaciones se deben considerar las perturbaciones generadas durante inflación.
- Para esto se considerarán 2 modelos inflacionarios: uno inspirado en el modelo RS II (*Randall and Sundrum, 1999*), y el otro en el gas de Chaplygin generalizado (*Bento, Bertolami and Sen, 2002*).
- Además se introducirá un tipo de factor de escala que es una solución exacta para un tipo particular del potencial escalar del inflatón:

$$a(t) = \exp(At^f), \quad (16)$$

donde $A > 0$ y $0 < f < 1$. Este es el llamado modelo de *inflación intermedia* (*Barrow and Saich, 1990*).

Cosmología de branas: Modelo RSII

- Estamos interesados en el modelo RSII descrito por la acción de Einstein-Hilbert en cinco dimensiones más la acción de la brana $4D$, dada por

$$S = S_{EH} + S_{brane} \quad (17)$$

con

$$S_{EH} = \int d^5 X \sqrt{-g^{(5)}} \left(\frac{1}{2\kappa_5^2} \left(R^{(5)} - 2\Lambda^{(5)} \right) \right),$$

$$S_{brane} = \int d^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa_5^2} K^\pm - \lambda + L_m^{(4)} \right)$$

- Las ecuaciones de Einstein en 5 dimensiones (incluyendo explícitamente la contribución de la brana)

$$R_{AB}^{(5)} - \frac{1}{2} g_{AB}^{(5)} R^{(5)} = \kappa_5^2 \left[T_{AB}^{(5)} + \tau_{AB} \delta(y) \right]. \quad (18)$$

Ecuaciones cosmológicas en la brana

- Las ecuaciones gravitacionales en la brana

$$G_{\mu\nu}^{(4)} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + 8\pi G_{(4)} T_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}. \quad (19)$$

- Utilizando la métrica de Robertson-Walker, la componente 00 de esta ecuación está dada por

$$H^2 = \frac{\kappa_5^2}{6} \Lambda^{(5)} + \frac{\kappa_5^4}{36} \lambda^2 + \frac{\kappa_5^4}{18} \lambda \rho + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho^2 + \frac{C}{a^2} - \frac{\bar{k}}{a^2} \quad (20)$$

$$H^2 = \frac{\Lambda^{(4)}}{3} + \frac{8\pi G_{(4)}}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) + \frac{C}{a^2} - \frac{\bar{k}}{a^2},$$

donde la escala fundamental de Planck $5D$ se relaciona con la escala $4D$ de Planck efectiva mediante

$$m_p = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{M_5^2}{\sqrt{\lambda}} \right) M_5 \quad (21)$$

- Se debe tener la expansión estándar para temperaturas menores que 1MeV , de lo contrario la nucleosíntesis se vería afectada. Esto implica que $\lambda \gg \rho \simeq (1\text{MeV})^4 = 10^{-12}(\text{GeV})^4$ (Copeland et al., 2001).
- Si fijamos la constante cosmológica $\Lambda^{(4)} = 0$, y considerando que durante inflación los dos últimos términos se vuelven despreciables, obtenemos.

$$H^2 = \frac{8\pi G_{(4)}}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right). \quad (22)$$

- Además cabe destacar que la ecuación de conservación de energía aún es válida en la brana.

Gas de Chaplygin Generalizado (GCG)

- El modelo del GCG corresponde a un fluido con una ecuación de estado exótica, el cual se comporta como materia a épocas tempranas y como una constante cosmológica a tiempos posteriores

$$p_{GCG} = -\frac{\alpha}{\rho_{GCG}^\beta}, \quad (23)$$

donde $\alpha > 0$ y $0 < \beta \leq 1$. Junto con la ecuación de conservación de la energía en un universo con métrica Robertson Walker se obtiene una expresión para la densidad de energía

$$\rho_{GCG} = \left[\alpha + \frac{B}{a^{3(1+\beta)}} \right]^{\frac{1}{1+\beta}} = \rho_{GCG0} \left[B_s + \frac{(1 - B_s)}{a^{3(1+\beta)}} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}. \quad (24)$$

- De esta forma el GCG es caracterizado por $B_s = \alpha / \rho_{GCG0}^{1+\beta}$ y por β . Mediante datos provenientes de Archeops, BOOMERANG y observaciones a alto red-shift estos valores han sido restringidos.

Gas de Chaplygin Generalizado (GCG)

1 $B_s = 0.73_{-0.06}^{+0.06}$ y $\beta = -0.09_{-0.12}^{+0.15}$

- Podemos ver la ecuación anterior no como una consecuencia de la ecuación de estado (23), sino más bien como una modificación de la gravedad. Se puede suponer que la dinámica gravitacional durante inflación da lugar a una ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} [\alpha + \rho^{1+\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}} \rightarrow \frac{8\pi G}{3} [\alpha + \rho_\phi^{1+\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}} \quad (25)$$

- A continuación se resolverán las ecuaciones en el contexto de inflación intermedia para estos dos modelos de gravedad expuestos.

Gas de Chaplygin Generalizado (GCG)

- 1 $B_s = 0.73_{-0.06}^{+0.06}$ y $\beta = -0.09_{-0.12}^{+0.15}$
- 2 $0.81 \lesssim B_s \lesssim 0.85$ y $0.2 \lesssim \beta \lesssim 0.6$

- Podemos ver la ecuación anterior no como una consecuencia de la ecuación de estado (23), sino más bien como una modificación de la gravedad. Se puede suponer que la dinámica gravitacional durante inflación da lugar a una ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} [\alpha + \rho^{1+\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}} \rightarrow \frac{8\pi G}{3} [\alpha + \rho_\phi^{1+\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}} \quad (25)$$

- A continuación se resolverán las ecuaciones en el contexto de inflación intermedia para estos dos modelos de gravedad expuestos.

Gas de Chaplygin Generalizado (GCG)

- 1 $B_s = 0.73_{-0.06}^{+0.06}$ y $\beta = -0.09_{-0.12}^{+0.15}$
- 2 $0.81 \lesssim B_s \lesssim 0.85$ y $0.2 \lesssim \beta \lesssim 0.6$
- 3 $B_s = 0.775_{-0.0161}^{+0.0161}$ y $\beta = 0.00126_{-0.00126}^{+0.000970}$

- Podemos ver la ecuación anterior no como una consecuencia de la ecuación de estado (23), sino más bien como una modificación de la gravedad. Se puede suponer que la dinámica gravitacional durante inflación da lugar a una ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} [\alpha + \rho^{1+\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}} \rightarrow \frac{8\pi G}{3} [\alpha + \rho_\phi^{1+\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}} \quad (25)$$

- A continuación se resolverán las ecuaciones en el contexto de inflación intermedia para estos dos modelos de gravedad expuestos.

Inflación en la brana y en GCG

- En ambos modelos consideramos que el contenido de materia es un campo escalar estándar, para el cual $\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$ y $p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$. La ecuación de conservación equivale a la ecuación de movimiento del campo escalar

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (26)$$

- Las soluciones para ϕ en ambos modelos están dadas por ($\kappa = 8\pi G/3 = 8\pi/3m_p^2$)

$$\phi(t) = K^{-1}\mathcal{B} \left[\frac{\kappa\lambda t^{2(1-f)}}{2(Af)^2}; \frac{f}{4(f-1)}, \frac{3}{4} \right] \quad (\text{brana}), \quad (27)$$

$$\phi(t) = \tilde{K}^{-1}\mathcal{B} \left[\left(\frac{\kappa}{3}\right)^{1+\beta} \frac{\alpha t^{2(1-f)(1+\beta)}}{2(Af)^{2(1+\beta)}}; \frac{f(1+\beta)^{-1}}{2(1-f)}, \frac{2+\beta}{2(1+\beta)} \right] \quad (\text{GCG}). \quad (28)$$

Inflación en la brana y en GCG

- En la aproximación *slow-roll*, el potencial escalar $V(\phi)$ en ambos modelos está dado por

$$V(\phi) \simeq \lambda \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2(Af)^2 (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-2(1-f)}}{\kappa\lambda}} \right) \quad (\text{brana}), \quad (29)$$

$$V(\phi) \simeq \left[\left(\frac{3(Af)^2}{\kappa} \right)^{1+\beta} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{-2(1-f)(1+\beta)} - \alpha \right]^{\frac{1}{1+\beta}} \quad (\text{GCG}). \quad (30)$$

- El número de e-folds entre dos valores del tiempo cosmológico t_1 y t_2 , o análogamente entre dos valores del campo escalar $\phi(t_1)$ y $\phi(t_2)$

$$N = \int_{t_1}^{t_2} H dt = A \left[(\mathcal{B}^{-1} [K\phi_2])^f - (\mathcal{B}^{-1} [K\phi_1])^f \right] \quad (\text{brana}), \quad (31)$$

$$N = A \left[(\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi_2])^f - (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi_1])^f \right] \quad (\text{GCG}) \quad (32)$$

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

- Estudiaremos el espectro de perturbaciones escalares y tensoriales generadas en inflación de un campo único.
- En primer lugar se consideran pequeñas perturbaciones inhomogéneas en torno al campo homogéneo $\phi_0(t)$

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \delta\phi(x, t). \quad (33)$$

- Un espacio-tiempo FRW espacialmente plano perturbado es descrito por

$$ds^2 = -(1 + 2A)dt^2 + 2a^2(t)(\partial_i B - S_i)dt dx^i \quad (34) \\ + a^2(t) \left[(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_{ij}E + 2\partial_{(i}F_{j)} + h_{ij} \right] dx^i dx^j.$$

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

Perturbaciones escalares

- Consideremos la cantidad invariante de gauge $\mathcal{R} \equiv \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$.
- Es la perturbación en la curvatura sobre hipersuperficies ortogonales a las líneas mundo cómoviles. Un hecho clave es que a escalas super-horizonte es prácticamente constante, independiente de la dinámica gravitacional y considerando la conservación del tensor de energía momentum.
- En el gauge espacialmente plano ($\psi = 0$)

$$|\mathcal{R}| \simeq \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right) \delta\phi \simeq \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right) \left(\frac{H}{2\pi} \right), \quad (35)$$

después del cruce del radio de Hubble. Se puede ver que la amplitud de la perturbaciones escalares es $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2_{(k=aH)}$.

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{3\kappa}{8\pi^2} \frac{(Af)^3}{1-f} (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-(2-3f)} \sqrt{1 + \frac{2(Af)^2 (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-2(1-f)}}{\kappa\lambda}} \quad (36)$$

(brana),

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{3\kappa}{8\pi^2} \frac{(Af)^3}{1-f} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{-(2-3f)} \times \left[1 - \alpha \left(\frac{\kappa}{3(Af)^2} \right)^{1+\beta} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{2(1-f)(1+\beta)} \right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}. \quad (37)$$

(GCG).

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

Índice espectral

- Por otro lado el índice espectral $n_s \equiv 1 - \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k}$, entonces

$$n_s \simeq 1 - \frac{(2-3f)}{Af} (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-f} - \frac{2Af(1-f)}{\kappa\lambda} \quad (38)$$
$$\times \frac{(\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-(2-f)}}{\left(1 + \frac{2(Af)^2 (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-2(1-f)}}{\kappa\lambda}\right)}$$

(brana),

$$n_s \simeq 1 - \frac{(2-3f)}{Af} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{-f} - \left[\frac{\alpha_0 \beta \gamma}{Af(1+\beta)} \right] \quad (39)$$
$$\times \left[1 - \alpha_0 (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^\gamma \right]^{-1} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{\gamma-f}$$

(GCG).

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

Perturbaciones tensoriales

- En el caso de branas, las perturbaciones tensoriales son algo más complicadas ya que los gravitones se propagan en el bulk.

$$\mathcal{P}_T = 24\kappa \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 F^2(x). \quad (40)$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{6\kappa (Af)^2}{\pi^2} (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-2(1-f)} F^2(x),$$

donde $x = Hm_p \sqrt{3/4\pi\lambda} = (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-(1-f)} \sqrt{\frac{3(Afm_p)^2}{4\pi\lambda}}$ y

$$F^2(x) = \left[\sqrt{1+x^2} - x^2 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

Perturbaciones tensoriales

- En el caso del modelo *GCG* la amplitud de las perturbaciones tensoriales tiene la misma forma que en *RG*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T &= 24\kappa \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \\ \mathcal{P}_T &= \frac{6\kappa (Af)^2}{\pi^2} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{-2(1-f)}.\end{aligned}\quad (42)$$

- Una cantidad observable importante es la razón tensorial-escalar r dada por

$$r = \left(\frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_R}\right).\quad (43)$$

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

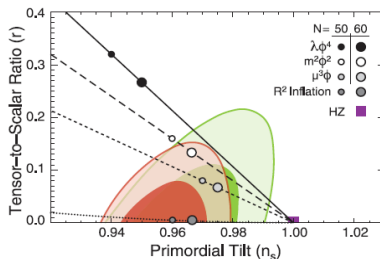
Razón tensorial-escalar

$$r(\phi) \simeq 16 \frac{(1-f)}{Af} \frac{(\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-f}}{\sqrt{1 + \frac{2(Af)^2 (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-2(1-f)}}{\kappa\lambda}}} F^2(\phi) \text{ (brana)}, \quad (44)$$

$$r(\phi) \simeq 16 \frac{(1-f)}{Af} (\mathcal{B}^{-1} [K\phi])^{-f} \quad (45)$$
$$\times \left[1 - \alpha \left(\frac{\kappa}{3(Af)^2} \right)^{1+\beta} (\mathcal{B}^{-1} [\tilde{K}\phi])^{2(1-f)(1+\beta)} \right]^{-\frac{\beta}{1+\beta}} \text{ (CGC)}.$$

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

¿Qué se mide?

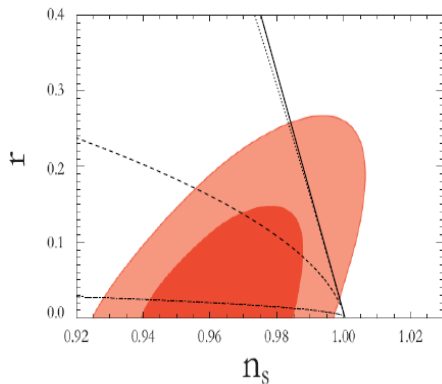


PRIMORDIAL SPECTRUM: TENSORS & RUNNING SCALAR INDEX^a

Parameter	WMAP	+eCMB	+eCMB+BAO	+eCMB+BAO+ H_0
Tensor mode amplitude ^b				
r	< 0.38 (95% CL)	< 0.17 (95% CL)	< 0.12 (95% CL)	< 0.13 (95% CL)
n_s	0.992 ± 0.019	0.970 ± 0.011	0.9606 ± 0.0084	0.9636 ± 0.0084

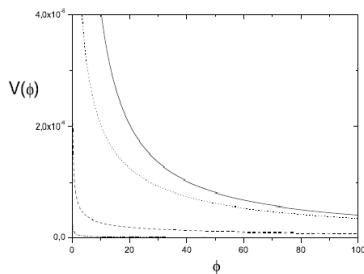
Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

Modelo RSII



Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

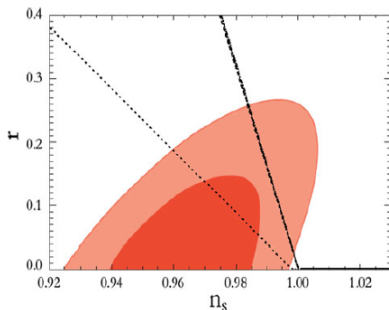
Modelo RSII



- De izquierda a derecha hemos tomado los valores de la tensión de la brana $\lambda = 10^{-10}$, $\lambda = 10^{-8}$, $\lambda = 10^{-6}$ y el modelo intermedio estándar ($\lambda \rightarrow \infty$). Hemos tomado los valores $\kappa = 1$ y $A \simeq 3.587 \times 10^{-2}$; $A \simeq 3.692 \times 10^{-2}$; $A \simeq 3.692 \times 10^{-2}$ (En base a $N = 60$, $f = 1/2$ y el valor de *WMAP 7 years* $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq 2.43 \times 10^{-9}$)

Inflación en la brana y en GCG: Perturbaciones Cosmológicas

Modelo GCG



- De izquierda a derecha, para los pares $(\alpha = 0.81, \beta = 0.1)$, $(\alpha = 0.775, \beta = 0.00126)$, $(\alpha = 0.85, \beta = 0.6)$, hemos tomado los valores $A \simeq 2.635 \times 10^{-2}$; $A \simeq 8.225 \times 10^{-2}$; $A \simeq 8.407 \times 10^{-5}$ (En base a $N = 60$, $f = 1/2$, $\rho_{GCG0} = 1$, $\kappa = 1$) y el valor de *WMAP 7 years* $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq 2.43 \times 10^{-9}$).