Cristalizando Simetrías

Fernando Izaurieta

Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas,
Universidad Católica de la Ssma. Concepción, Chile

COSMOCONCE III
Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

Contents

Contents

Diamantes

เพชรกาญจนาภิเษก

Diamantes

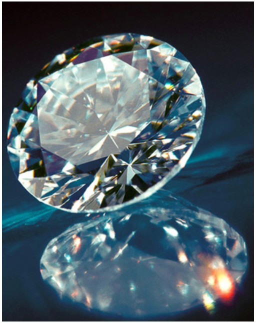
¡Valiosos y escasos!

$$\text{Presión} \sim 10^5 \text{ Atm.}$$
$$\text{Temperatura} \sim 2500^\circ\text{C.}$$

Diamantes

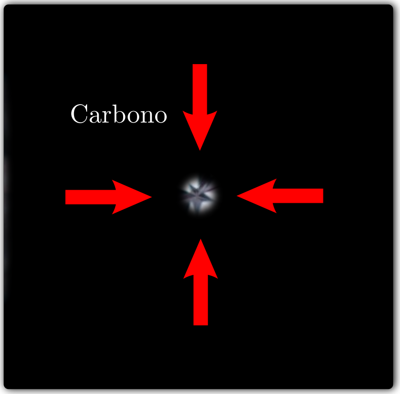
¿Cómo **fabricar** diamantes?

Diamantes

Беспрессовая Аппаратура высокого давления
"Разрезная Сфера"

Diamantes



¡Y todo empieza con una pequeña semilla!

Diamantes

¡Y todo empieza con una pequeña semilla!

Diamantes

¡Pero no basta con saber hacer crecer un diamante!

Diamantes

Para crear la joya perfecta,
¡La parte más difícil es saber como **cortarlo**!

Diamantes

¿Será posible hacer este mismo proceso para crear álgebras de Lie?

Diamantes

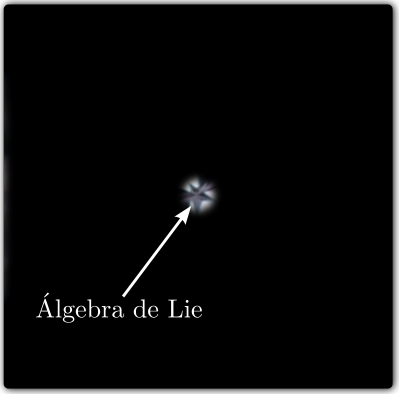
¡Sí!

Diamantes

1. Cultivar un Álgebra:
   - Tomar una pequeña álgebra de Lie como “semilla”,
   - rodearla con una cubierta de entidades muy simples,
   - ¡Y crear una simetría mucho más grande!
2. Tallado de un Álgebra:
   - ¡Cortar partes del álgebra en forma tal que se obtenga una simetría reducida de especial belleza!

Contents

Semilla: Un Álgebra de Lie



Semilla: Un Álgebra de Lie

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathfrak{g}$$

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = -[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]$$

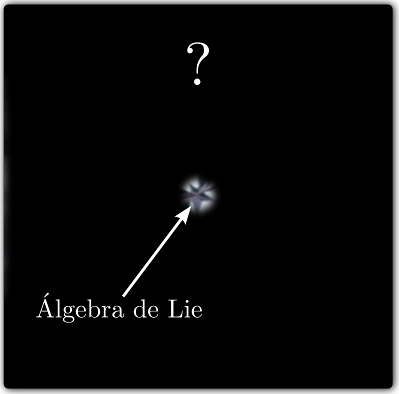
$$[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], \boldsymbol{Z}] + [[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}], \boldsymbol{Y}] + [[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \boldsymbol{X}] = 0$$

Semilla: Un Álgebra de Lie

Cuando escojemos una base (generadores) $\{\boldsymbol{T}_A\}$,

$$[\boldsymbol{T}_A, \boldsymbol{T}_B] = C_{AB}{}^{C}\boldsymbol{T}_C$$

Buscando algo sencillo. . .

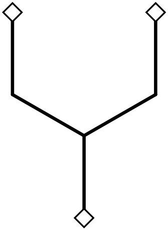


Algo “simple”. . .

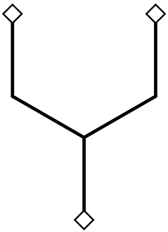
Buscando algo sencillo. . .

$$S = \{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$$

Buscando algo sencillo. . .

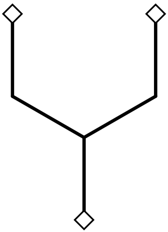


Buscando algo sencillo. . .



$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\gamma(\alpha,\beta)}$$

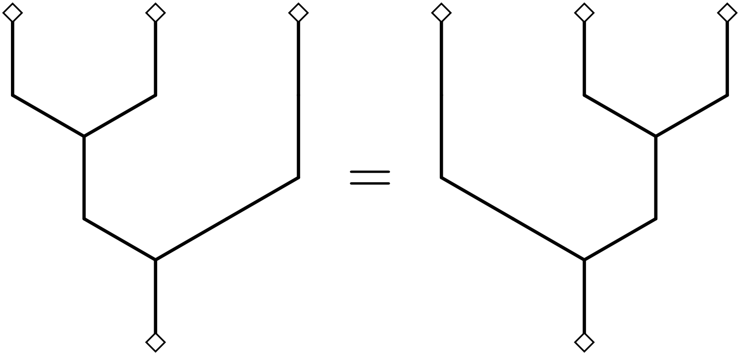
Buscando algo sencillo…



$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\gamma(\alpha,\beta)}$$

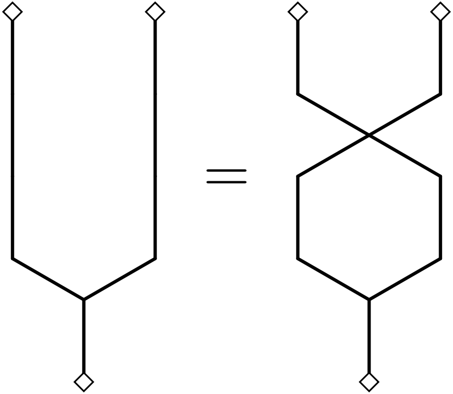
$$K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \begin{cases} 1 \text{ cuando } \lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma, \\ 0 \text{ cuando } \lambda_\alpha \lambda_\beta \neq \lambda_\gamma. \end{cases}$$

Buscando algo sencillo. . .



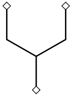
$$[\lambda_\alpha]^\gamma{}_\beta = K_{\alpha\beta}{}^\gamma$$

Buscando algo sencillo...

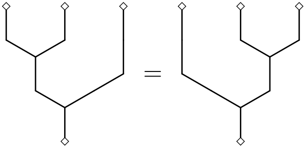


$$K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = K_{\beta\alpha}{}^{\gamma}$$

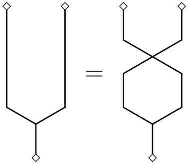
Buscando algo sencillo. . .



Semigrupo



Abeliano



Creando el Diamante

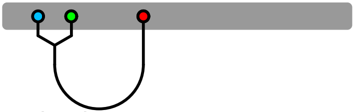
¿Y cómo fabricamos nuestro “diamante”?

Creando el Diamante

$$\left[\boldsymbol{T}_{(A,\alpha)},\boldsymbol{T}_{(B,\beta)}\right] = K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} C_{AB}{}^{C} \boldsymbol{T}_{(C,\gamma)}$$

¡Son las constantes de estructura de una nueva Álgebra de Lie!

Álgebra S-Expandida

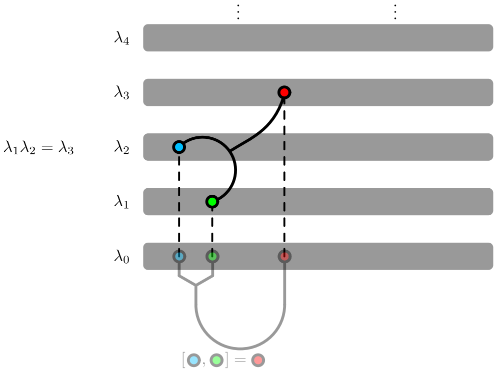


[●, ●] = ●

Álgebra de Lie

$\mathfrak{g}$

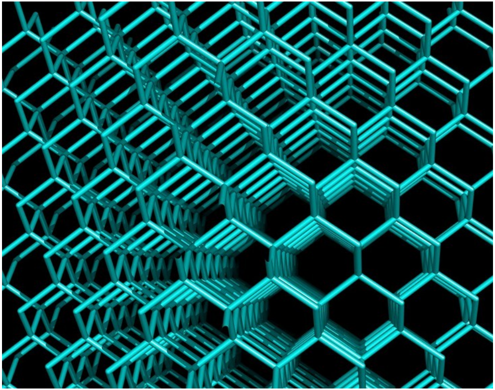
Álgebra S-Expandida



Álgebra de Lie

$\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \times S$

Álgebra S-Expandida



¡Hemos creado una “estructura cristalina” de Álgebras de Lie!

Álgebra S-Expandida

Con lo que hemos creado una estructura bellísima. . . y monótona

Álgebra S-Expandida

¿Cómo "tallamos"un Álgebra de Lie?

Contents

Tallando Álgebras

Tallar un diamante es muy difícil. . .
¡cuando no se conoce la estructura cristalina!

Tallando Álgebras

¡Separamos las álgebras de Lie
en una **estructura** de subespacios
con distinto significado físico!

Tallando Álgebras

¿Cómo codificamos este tipo de estructuras en general?

Tallando Álgebras

¡Debemos considerar conjuntos de **etiquetas**!

Tallando Álgebras

- **Ejemplo:** Álgebra de AdS

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{P}_a, \boldsymbol{P}_b] &= \boldsymbol{J}_{ab}, \\
[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{P}_c] &= \eta_{cb}\boldsymbol{P}_a - \eta_{ca}\boldsymbol{P}_b, \\
[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{J}_{cd}] &= \eta_{bc}\boldsymbol{J}_{ad} - \eta_{bd}\boldsymbol{J}_{ac} - \eta_{ac}\boldsymbol{J}_{bd} + \eta_{ad}\boldsymbol{J}_{bc}.
\end{aligned}
$$

Tallando Álgebras

- **Ejemplo:** Álgebra de AdS

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{P}_a, \boldsymbol{P}_b] &= \boldsymbol{J}_{ab}, \\
[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{P}_c] &= \eta_{cb}\boldsymbol{P}_a - \eta_{ca}\boldsymbol{P}_b, \\
[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{J}_{cd}] &= \eta_{bc}\boldsymbol{J}_{ad} - \eta_{bd}\boldsymbol{J}_{ac} - \eta_{ac}\boldsymbol{J}_{bd} + \eta_{ad}\boldsymbol{J}_{bc}.
\end{aligned}
$$

$$E = \{\mathrm{P}, \mathrm{J}\}$$

$$
\begin{aligned}
[V_{\mathrm{P}}, V_{\mathrm{P}}] &\subset V_{\mathrm{J}}, \\
[V_{\mathrm{J}}, V_{\mathrm{P}}] &\subset V_{\mathrm{P}}, \\
[V_{\mathrm{J}}, V_{\mathrm{J}}] &\subset V_{\mathrm{J}}.
\end{aligned}
$$

Tallando Álgebras

¡Podemos hacer lo mismo con el **Semigrupo**!

Tallando Álgebras

Álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in E} V_p ,$$

$$e : E \times E \to 2^E ,$$

$$[V_p, V_q] = \bigoplus_{r \in e(p,q)} V_r .$$

Semigrupo Abeliano

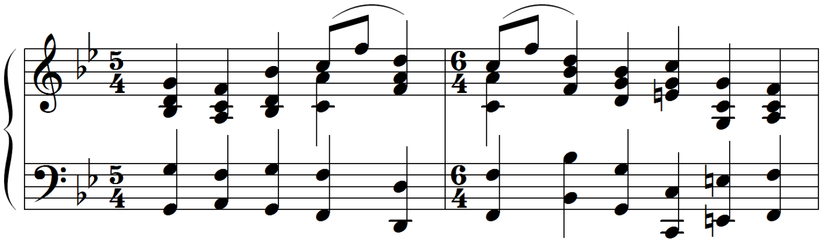
$$S = \bigcup_{p \in E'} S_p ,$$

$$e' : E' \times E' \to 2^{E'} ,$$

$$S_p \cdot S_q \subset \bigcap_{r \in e'(p,q)} S_r .$$

¿Y qué hacemos con esto?

Tallando Álgebras



¡Cuando tenemos dos estructuras disponibles,
podemos hacer **acordes**!

Tallando Álgebras

Álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in E} V_p,$$
$$e : E \times E \to 2^E,$$
$$[V_p, V_q] = \bigoplus_{r \in e(p,q)} V_r.$$

Semigrupo Abeliano

$$S = \bigcup_{p \in E} S_p,$$
$$e : E \times E \to 2^E,$$
$$S_p \cdot S_q \subset \bigcap_{r \in e(p,q)} S_r.$$

Cuando esto sucede…

Tallando Álgebras

$$\mathfrak{G}_{\mathrm{R}} = \bigoplus_{p \in E} V_p \times S_p$$

es una subálgebra de $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \times S$
(Subálgebra resonante)

Ejemplos relevantes

- Álgebra M,
- Álgebra de Maxwell,
- Álgebra de Soroka,
- Álgebra de Kac–Moody,
- ¿Álgebra de Virasoro?
- etc.

¡son ejemplos de este procedimiento!
¿Y qué con eso?

Invariantes para Álgebras S-expandidas

$$\left\langle\, F \wedge *F \,\right\rangle$$

Cuando más la necesitas,
¡la traza te abandona!

Invariantes para Álgebras S-expandidas

¡La S-expansión entrega expresiones cerradas para polinomios invariantes (distintos de la traza)!

$\Downarrow$

¡**Teorías de gauge**!

Contents

Conclusiones: ¡Incluyendo números de Grassmann!

- Junto con los λ_α conmutativos,

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\beta \lambda_\alpha,$$

podemos incluir números de Grassmann anticonmutativos,

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i.$$

Conclusiones: ¡Incluyendo números de Grassmann!

Y así el álgebra de Lie original

$$[\boldsymbol{T}_A, \boldsymbol{T}_B] = C_{AB}{}^{C}\boldsymbol{T}_C$$

se transforma en…

Conclusiones: ¡Superálgebra “rara”!

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{T}_{(A,\alpha)}, \boldsymbol{T}_{(B,\beta)}\right] &= K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} C_{AB}{}^{C} \boldsymbol{T}_{(C,\gamma)}, \\
\left\{\boldsymbol{Q}_{(A,i)}, \boldsymbol{Q}_{(B,j)}\right\} &= K_{ij}{}^{\gamma} C_{AB}{}^{C} \boldsymbol{T}_{(C,\gamma)}, \\
\left[\boldsymbol{Q}_{(A,i)}, \boldsymbol{T}_{(B,\beta)}\right] &= K_{i\beta}{}^{j} C_{AB}{}^{C} \boldsymbol{Q}_{(C,j)}.
\end{aligned}
$$

¡una superálgebra!

¿Qué es esto?

Un ejemplo sencillo:

$$
\begin{aligned}
\left\{\boldsymbol{Q}_{(a,i)}, \boldsymbol{Q}_{(b,j)}\right\} &= \varepsilon_{ij}\boldsymbol{Z}_{ab}, \\
\left[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{Q}_{(c,i)}\right] &= \eta_{cb}\boldsymbol{Q}_{(a,i)} - \eta_{ca}\boldsymbol{Q}_{(b,i)}, \\
\left[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{Z}_{cd}\right] &= \eta_{bc}\boldsymbol{Z}_{ad} - \eta_{bd}\boldsymbol{Z}_{ac} - \eta_{ac}\boldsymbol{Z}_{bd} + \eta_{ad}\boldsymbol{Z}_{bc}, \\
\left[\boldsymbol{J}_{ab}, \boldsymbol{J}_{cd}\right] &= \eta_{bc}\boldsymbol{J}_{ad} - \eta_{bd}\boldsymbol{J}_{ac} - \eta_{ac}\boldsymbol{J}_{bd} + \eta_{ad}\boldsymbol{J}_{bc}.
\end{aligned}
$$

¡Los generadores fermiónicos no son espinores,
sino que vectores de Lorentz!
¿Sirve esto de algo. . . ?

¿Qué es esto?

Una sospecha:

$$\boldsymbol{A} = B^{(A,\alpha)}\boldsymbol{T}_{(A,\alpha)} + \varphi^{(A,i)}\boldsymbol{Q}_{(A,i)}$$

¿Fantasmas de Faddev-Popov?
¿Alguna otra idea?

¡Gracias!

Quetzal ubuntu Linux

wxMaxima	Cadabra	Kile	Evince	Inkscape	Gimp
Computational Algebra	Computational Algebra for Quantum Field Theory	LaTeX Editor	PDF Viewer	Vector Graphics Editor	Image Editor

Para crear esta charla, se utilizó un conjunto de excelentes programas *libres* y *gratuitos*, fruto del esfuerzo comunitario de artistas, físicos, matemáticos y programadores de todo el mundo.

¡Gracias!

¡Gracias!

¡Gracias!