Modos cuasi - normales y determinantes a 1 - loop para el campo de Dirac en BTZ.

F. Bugini

15 de marzo, 2013

Planificación

- Preliminares
- Motivación
- Modos cuasi - normales
- Determinante a 1-loop en el bulk
- Determinante en el borde
- Conexión con modos cuasi - normales
- Conclusiones

Preliminares

- 1997$\longrightarrow$ Correspondencia AdS/CFT

- 1997$\rightarrow$ Correspondencia AdS/CFT
- Geometría asintóticamente AdS $\longleftrightarrow$ Teoría de campos en infinito conforme

Preliminares

- 1997$\longrightarrow$ Correspondencia AdS/CFT
- Geometría asintóticamente AdS $\longleftrightarrow$ Teoría de campos en infinito conforme
- Principio holográfico

Preliminares

- 1997$\rightarrow$ Correspondencia AdS/CFT
- Geometría asintóticamente AdS $\longleftrightarrow$ Teoría de campos en infinito conforme
- Principio holográfico
- Función de partición$\longleftrightarrow$Función de partición

Preliminares

.

Motivación

Motivación

- Se encuentra que determinante a 1-loop puede ser escrito en términos de modos cuasi normales

F. Denef, S. Hartnoll y S. Sachdev "Black hole determinants and quasi normal modes"

- Conexión con fórmula holográfica de determinantes a 1-loop

$$\frac{\det_{-}(\nabla_X + m)}{\det_{+}(\nabla_X + m)} = \det S_M$$

R. Aros, D.E. Diaz "Functional determinants, generalized BTZ geometries and Selberg zeta function"

- Relación escrita en término Z_{BTZ}

Nuestro caso

- Consideramos BTZ estático
- Elemento de línea

$$ds^2 = -r_+^2 \sinh^2 \mu dt^2 + d\mu^2 + r_+^2 \cosh^2 \mu d\phi^2$$
$$0 < \mu < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Primer objetivo

Modos cuasi normales

Modos cuasi normales

- Ecuación de Dirac en la geometría del BTZ

$$\{\gamma^{\nu}(\partial_{\nu} + \tfrac{1}{8}\omega_{\nu}^{ab}[\gamma^{a}, \gamma^{b}]) + m\}\Psi = 0$$

- Si el espinor de Dirac es $\Psi = \frac{1}{\sqrt{\sinh\mu\cosh\mu}} e^{-i\varpi t + in\phi} \begin{pmatrix} \beta \\ \chi \end{pmatrix}$ se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{-i\omega}{r_{+}\sinh\mu}\chi + \frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{in}{r_{+}\cosh\mu}\beta - m\beta &= 0 \\ \frac{i\omega}{r_{+}\sinh\mu}\beta + \frac{\partial\beta}{\partial\mu} + \frac{in}{r_{+}\cosh\mu}\chi - m\chi &= 0 \end{aligned}$$

Modos cuasi normales

- Desacoplamos el sistema de ecuaciones
- $\Psi^+ = \beta + \chi, \Psi^- = \beta - \chi$

Modos cuasi normales

- Desacoplamos el sistema de ecuaciones
- $\Psi^+ = \beta + \chi, \Psi^- = \beta - \chi$
- $\Psi^+ = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4}(1 + \tanh \mu)^{1/2}(\Psi_1 + \Psi_2)$

Modos cuasi normales

- Desacoplamos el sistema de ecuaciones
- $\Psi^+ = \beta + \chi, \Psi^- = \beta - \chi$
- $\Psi^+ = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4} (1 + \tanh \mu)^{1/2} (\Psi_1 + \Psi_2)$
- $\Psi^- = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4} (1 - \tanh \mu)^{1/2} (\Psi_1 - \Psi_2)$

Modos cuasi normales

- Desacoplamos el sistema de ecuaciones
- $\Psi^{+} = \beta + \chi, \Psi^{-} = \beta - \chi$
- $\Psi^{+} = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4}(1 + \tanh \mu)^{1/2}(\Psi_1 + \Psi_2)$
- $\Psi^{-} = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4}(1 - \tanh \mu)^{1/2}(\Psi_1 - \Psi_2)$
- Estos cambios de variables nos entregan el sistema de ecuaciones (con $z = \tanh^2 \mu$)

- Desacoplamos el sistema de ecuaciones
- $\Psi^{+} = \beta + \chi, \Psi^{-} = \beta - \chi$
- $\Psi^{+} = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4}(1 + \tanh \mu)^{1/2}(\Psi_1 + \Psi_2)$
- $\Psi^{-} = (1 - \tanh^2 \mu)^{-1/4}(1 - \tanh \mu)^{1/2}(\Psi_1 - \Psi_2)$
- Estos cambios de variables nos entregan el sistema de ecuaciones (con $z = \tanh^2 \mu$)
- $$\begin{aligned} \left\{2\sqrt{z}(1-z)\frac{d}{dz} + \frac{i\omega}{r_+}\sqrt{\frac{1}{z}} + \frac{in}{r_+}\sqrt{z}\right\}\Psi_1 &= -\left(\frac{i\omega}{r_+} + \frac{in}{r_+} + \frac{1}{2} - m\right)\Psi_2 \\ \left\{2\sqrt{z}(1-z)\frac{d}{dz} - \frac{i\omega}{r_+}\sqrt{\frac{1}{z}} - \frac{in}{r_+}\sqrt{z}\right\}\Psi_2 &= \left(\frac{i\omega}{r_+} + \frac{in}{r_+} - \frac{1}{2} + m\right)\Psi_1 \end{aligned}$$

Modos cuasi normales

- Luego de desacoplar el sistema se encuentra la solución para Ψ_1
- $\Psi_1 = z^a (1-z)^b F(\alpha, \beta, \gamma; z)$
  - $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ función hipergeométrica

Modos cuasi normales

- Luego de desacoplar el sistema se encuentra la solución para Ψ_1
- $\Psi_1 = z^a(1-z)^b F(\alpha,\beta,\gamma;z)$
  - $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ función hipergeométrica
  - $a = \frac{-i\omega}{2r_+}$, $b = \frac{+1}{2}(m+\frac{1}{2})$

- Luego de desacoplar el sistema se encuentra la solución para Ψ_1
- $\Psi_1 = z^a (1-z)^b F(\alpha, \beta, \gamma; z)$
  - $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ función hipergeométrica
  - $a = \frac{-i\omega}{2r_+}, b = \frac{+1}{2}(m + \frac{1}{2})$
  - $$\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-i\omega}{2r_+} - \frac{in}{2r_+} - \frac{1}{2}(m+\frac{1}{2}) \\ \frac{-i\omega}{2r_+} + \frac{in}{2r_+} - \frac{1}{2}(m+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
    $$\beta = \left\{ \begin{array}{c} a + b + \frac{1}{2} + \frac{in}{2r_+} \\ a + b - \frac{in}{2r_+} \end{array} \right.$$
    $$\gamma = 2a + \frac{1}{2}$$

Modos cuasi normales

- Imponiendo que la solución se anule en el infinito $(\mu \to \infty \Leftrightarrow z \to 1)$
  - Término conflictivo $\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})}$

Modos cuasi normales

- Imponiendo que la solución se anule en el infinito $(\mu \to \infty \Leftrightarrow z \to 1)$
  - Término conflictivo $\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})}$
  - Esto se anula sólo en los polos de $\Gamma(x)$

Modos cuasi normales

- Imponiendo que la solución se anule en el infinito $(\mu \to \infty \Leftrightarrow z \to 1)$
  - Término conflictivo $\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})}$
  - Esto se anula sólo en los polos de $\Gamma(x)$
  - Encontrando así los modos cuasi normales

Modos cuasi normales

- Imponiendo que la solución se anule en el infinito $(\mu \to \infty \Leftrightarrow z \to 1)$
  - Término conflictivo $\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})}$
  - Esto se anula sólo en los polos de $\Gamma(x)$
  - Encontrando así los modos cuasi normales
  - $$\begin{aligned} \omega_L &= -n - ir_+(2N+\tfrac{1}{2}+m) \quad , N \in \mathbb{N} \\ \omega_R &= n - ir_+(2N+\tfrac{3}{2}+m) \end{aligned}$$

A comparar

Determinante a 1-loop en el bulk

Determinante a 1-loop en el bulk

Operador de Dirac con masa en el bulk (BTZ euclídeo) cuyo inverso de temperatura es $\beta_{BTZ} = \frac{2\pi}{r_+}$.

$$ds^2 = d\mu^2 + r_+^2 \sinh^2 \mu d\tau^2 + r_+^2 \cosh^2 \mu d\phi^2$$

Truco: Heat-kernel + método de imágenes en $TAdS_3$

S.Datta, J.R. David, "Higher spin fermions in the BTZ black hole"

$$\begin{aligned} \log \det{}_+(\nabla_X + m) &= \log \det{}_+(\nabla - m) \\ &\sim \frac{1}{2} \log \det{}_+(\nabla^2 - m^2) \\ &\sim \frac{1}{2} tr \log(\nabla^2 - m^2) \end{aligned}$$

Determinante a 1-loop en el bulk

Encontrando así

$$\det_{+}(\nabla_X + m) = \prod_{k_1, k_2 \geq 0} \left(1 - e^{-l(k_1 + k_2 + \lambda)}\right)$$

para luego volver a BTZ haciendo una transformación modular $l = 2\pi r_{+}$. Con esto visualizamos la relación

$$\frac{\det_{-}(\nabla_X + m)}{\det_{+}(\nabla_X + m)} = \frac{Z_{BTZ}(\lambda_{-})}{Z_{BTZ}(\lambda_{+})}$$

Función de Selberg - Patterson

Es definida por

$$Z_{BTZ}(\lambda) = \prod_{k_1,k_2\geq 0}(1 - e^{-2\pi(k_1+k_2+\lambda)r_+})$$

Cuyos ceros son el conjunto

$$\zeta_{k_1,k_2,n} = -(k_1 + k_2) + \frac{in}{r_+}; k_{1,2} \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado...

Determinante en el borde

Determinante en el borde

- Anteriormente consideramos BTZ euclídeo $(t \longrightarrow i\tau)$.

Determinante en el borde

- Anteriormente consideramos BTZ euclídeo $(t \longrightarrow i\tau)$.
- Su borde corresponde a un $2 - toro$.

Determinante en el borde

- Anteriormente consideramos BTZ euclídeo $(t \rightarrow i\tau)$.
- Su borde corresponde a un $2 - toro$.
- Se lee el potencial a partir de la ecuación de Dirac.

Determinante en el borde

- Anteriormente consideramos BTZ euclídeo $(t \to i\tau)$.
- Su borde corresponde a un $2 - toro$.
- Se lee el potencial a partir de la ecuación de Dirac.
- Ecuación tipo Schrödinger en potencial de Pöschl - Teller para μ.

Determinante en el borde

- Elementos de matriz de Scattering

Determinante en el borde

- Elementos de matriz de Scattering

  - $$S_{(N,M)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}$$

Determinante en el borde

- Elementos de matriz de Scattering
  - $$S_{(N,M)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_{+}+|N|+i\frac{M}{r_{+}}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_{+}+|N|-i\frac{M}{r_{+}}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_{-}+|N|+i\frac{M}{r_{+}}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_{-}+|N|-i\frac{M}{r_{+}}}{2}\right)}$$
- Cálculo por fuerza bruta de $\det S_M$ se encuentra

Determinante en el borde

- Elementos de matriz de Scattering
  - $$S_{(N,M)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}$$
- Cálculo por fuerza bruta de $\det S_M$ se encuentra
  - $$\ln \det S_M = \sum_{N,M} \ln S_{(N,M)} = \ln \frac{Z_{BTZ}(\lambda_-)}{Z_{BTZ}(\lambda_+)}$$

Determinante en el borde

- Elementos de matriz de Scattering
  - $$S_{(N,M)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}$$
- Cálculo por fuerza bruta de $\det S_M$ se encuentra
  - $$\ln \det S_M = \sum_{N,M} \ln S_{(N,M)} = \ln \frac{Z_{BTZ}(\lambda_-)}{Z_{BTZ}(\lambda_+)}$$
- Resonancias del operador de Scattering

Determinante en el borde

- Elementos de matriz de Scattering
  - $$S_{(N,M)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_+ + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| + i\frac{M}{r_+} + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_- + |N| - i\frac{M}{r_+}}{2}\right)}$$
- Cálculo por fuerza bruta de $\det S_M$ se encuentra
  - $$\ln \det S_M = \sum_{N,M} \ln S_{(N,M)} = \ln \frac{Z_{BTZ}(\lambda_-)}{Z_{BTZ}(\lambda_+)}$$
- Resonancias del operador de Scattering
  - $$R' = s_{j,N,M} = -2j - \left(|N| + \frac{1}{2}\right) \pm i\frac{M}{r_+} \mp \frac{1}{2}$$

Entonces...?

Conexión con modos cuasi normales

Conexión con modos cuasi normales

- Geometría asíntóticamente AdS $\longrightarrow$ Determinante a 1-loop en términos de modos cuasi normales

F. Denef, S. Hartnoll y S. Sachdev "Black hole determinants and quasi normal modes"

Conexión con modos cuasi normales

- Geometría asíntóticamente AdS $\longrightarrow$ Determinante a 1-loop en términos de modos cuasi normales

F. Denef, S. Hartnoll y S. Sachdev "Black hole determinants and quasi normal modes"

- $Z_F \sim \prod_{\omega_{QN}} \prod_{n \geq 0} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{i\omega_{QN}}{2\pi T} \right) \left(n + \frac{1}{2} - \frac{i\omega^*_{QN}}{2\pi T} \right)$

Conexión con modos cuasi normales

- Geometría asíntóticamente AdS $\longrightarrow$ Determinante a 1-loop en términos de modos cuasi normales

F. Denef, S. Hartnoll y S. Sachdev "Black hole determinants and quasi normal modes"

- $$Z_F \sim \prod_{\omega_{QN}} \prod_{n \geq 0} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{i\omega_{QN}}{2\pi T} \right) \left(n + \frac{1}{2} - \frac{i\omega^*_{QN}}{2\pi T} \right)$$

- Nuestro caso

Conexión con modos cuasi normales

- Geometría asíntóticamente AdS $\longrightarrow$ Determinante a 1-loop en términos de modos cuasi normales

F. Denef, S. Hartnoll y S. Sachdev "Black hole determinants and quasi normal modes"

- $$Z_F \sim \prod_{\omega_{QN}} \prod_{n \geq 0} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{i\omega_{QN}}{2\pi T} \right) \left(n + \frac{1}{2} - \frac{i\omega^*_{QN}}{2\pi T} \right)$$

- Nuestro caso

- $$\lambda - s_{j,N,M} = \lambda \pm \tfrac{1}{2} + 2j + \left(|N| + \tfrac{1}{2} \right) \mp i \tfrac{M}{r_+}$$

Conexión con modos cuasi normales

- Geometría asíntóticamente AdS $\longrightarrow$ Determinante a 1-loop en términos de modos cuasi normales

F. Denef, S. Hartnoll y S. Sachdev "Black hole determinants and quasi normal modes"

- $$Z_F \sim \prod_{\omega_{QN}} \prod_{n \geq 0} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{i\omega_{QN}}{2\pi T} \right) \left(n + \frac{1}{2} - \frac{i\omega^*_{QN}}{2\pi T} \right)$$

- Nuestro caso

- $\lambda - s_{j,N,M} = \lambda \pm \frac{1}{2} + 2j + (|N| + \frac{1}{2}) \mp i\frac{M}{r_+}$
- $\omega_{L/R} = \pm M - ir_+(2j + \lambda \pm \frac{1}{2})$

Conexión con modos cuasi normales

- De aquí vemos

- De aquí vemos
  - $$\prod_{j,N,M}(\lambda - s_{j,N,M}) = \prod_{\omega_{QN}}\prod_{n\geq 0}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{i\omega_{QN}}{r_+}\right)\left(n+\frac{1}{2}-\frac{i\omega^*_{QN}}{r_+}\right)$$

Conexión con modos cuasi normales

- De aquí vemos
  - $$\prod_{j,N,M} (\lambda - s_{j,N,M}) = \prod_{\omega_{QN}} \prod_{n \geq 0} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{i\omega_{QN}}{r_+} \right) \left(n + \frac{1}{2} - \frac{i\omega^*_{QN}}{r_+} \right)$$
  - Determinante escrito en términos de resonancias de scattering!

Detalles a considerar

- Geometría determina periodicidad en las coordenadas

Detalles a considerar

- Geometría determina periodicidad en las coordenadas
- Cuatro posibles estructuras para el spin

Detalles a considerar

- Geometría determina periodicidad en las coordenadas
- Cuatro posibles estructuras para el spin
- Sólo podemos considerar tres de ellas!

Finalmente...

Conclusiones

Conclusiones

- Se verifica la fórmula holográfica para el campo spinorial en BTZ y TAdS

Conclusiones

- Se verifica la fórmula holográfica para el campo spinorial en BTZ y TAdS
- Se muestra la receta para el cálculo del determinante a 1-loop en términos de los modos cuasi normales y la función zeta de Selberg - Patterson

A futuro

- Generalizar a casos de spin arbitrarios (y a la cuerda????)

Muchas gracias!