Introducción a la Relatividad General

Patricio Mella Castillo
Universidad del BíoBío

Escuela de verano 2013

Conceptos básicos

Evento: Algo que ocurre instantáneamente en un punto específico del espacio (espaciotiempo)

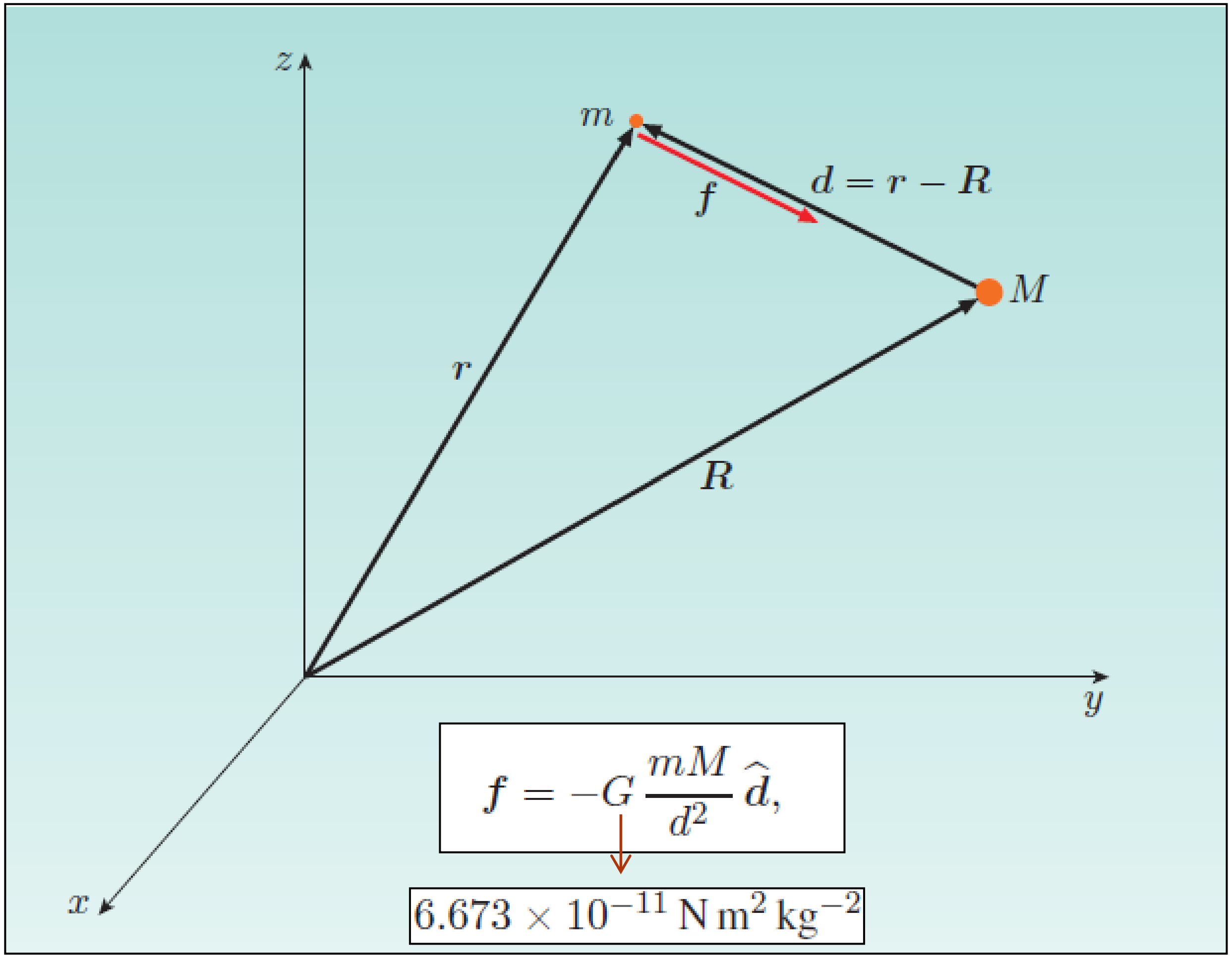
Marco de referencia: es un sistema para asignar coordenadas a los eventos. Consiste de un Sistema de relojes sincronizados que permiten un único valor de tiempo para ser asignado a un evento, y un sistema de coordenadas espaciales que permiten una única posición para ser asignada a cualquier evento.

Marco de referencia inercial: es un marco de referencia en el cual la primera ley de Newton del movimiento permanece válida.

Observadores: Un observador es un individuo dedicado a usar un marco particular de referencia para caracterizar eventos.

Ley fenomenológica de la gravitación de Newton

De acuerdo a Newton la gravedad es el resultado
de una fuerza gravitacional que actúa entre cuerpos masivos



$$\boldsymbol{f} = -G\,\frac{mM}{d^2}\,\widehat{\boldsymbol{d}},$$

$\boxed{6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}}$

Principios de Relatividad General

1. Principio de Equivalencia
2. Principio de Covariancia
3. Principio de Consistencia

Principio de equivalencia

La mecánica Newtoniana implica
dos concepto de masa diferentes:

Masa Inercial: Que describe la resistencia de una partícula a comenzar a ser acelerada por alguna fuerza. Y esta definida por la segunda ley de Newton

$$m = |\boldsymbol{F}|/|\boldsymbol{a}|.$$

Masa Gravitacional: Determina la fuerza que una partícula Experimenta debido (ejerce) sobre otra partícula como Resultado de la gravedad. Y está definida por la de gravitación De Newton

$$|\boldsymbol{F}_{12}| = G\frac{\mu_1\mu_2}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^2}.$$

Se ha establecido experimentalmente que La razón entre la masa inercial y la masa Gravitacional es la misma para todos Los cuerpos con una precisión de a lo menos Una parte en 10^{11}. En física Newtoniana, esta igualdad entre la masa Inercial y la masa gravitacional implica Que la aceleración de cualquier cuerpo debido A una fuerza gravitacional es independiente de la Masa del cuerpo.

Según Einstein, la idea que localmente uno no puede distinguir entre gravedad y aceleración, es conocido como:

Principio de Equivalencia débil

Dentro de una región bien localizada del espaciotiempo adyacente a una concentración de masa, el movimiento de cuerpos sujetos sólo a efectos gravitacionales, no pueden ser distinguidos por ningún experimento del movimiento de cuerpos dentro de una región con una apropiada aceleración uniforme

Principio de equivalencia fuerte

Dentro de una región bien localizada del espaciotiempo adyacente a una concentración de masa,
El comportamiento físico de los cuerpos no puede ser distinguido por ningún experimento del comportamiento físico de cuerpos dentro de una región con una apropiada aceleración uniforme

Principio de covariancia

Este es una extensión del principio de relatividad,
Y lo extiende requiriendo que la equivalencia física de
Todos los marcos , incluyendo también los no-inerciales

Principio de relatividad
La leyes de la física pueden ser escritas en la misma forma en todo marco inercial

Para preservar el principio de covariancia requerimos que las leyes físicas sean
Expresadas en términos de los objetos matemáticos llamados tensores

Tensores: Objetos matemáticos con multi-componentes que pueden ser reconocidos y clasificados de acuerdo a la manera que sus componentes se comportan bajo transformaciones generales de coordenadas.

Nuevas $x'^{\mu} \xrightarrow[\text{Función de}]{} x^{\nu}$ Viejas

$$\boxed{x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Un tensor de rango m contravariante y rango n covariante, transforma de acuerdo a

$$\boxed{T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\nu_m}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\alpha_n}}T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}.}$$

El desplazamiento infinitesimal es un tensor contravariante de rango 1, transforma como

$$\boxed{\mathrm{d}x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\mathrm{d}x^{\alpha}.}$$

El tensor métrico es de rango 2, y transforma como

$$\boxed{g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}}$$

$$\boxed{g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}g_{\alpha\beta}}$$

Que satisface la relación $\boxed{g^{\alpha\gamma}\,g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}}$

El tensor de curvatura de Riemann, e un tensor mixto, de rango 1 contravariante y rango 3 covariante, y transforma como

$$\boxed{R'^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\delta}}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}}$$

Subir y bajar índices tensoriales

$$\boxed{A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha}$$

$$\boxed{A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha}$$

Algebra Tensorial

Multiplicación por un escalar: Un tensor de rango m contravariante y rango n covariante puede ser multiplicado por un escalar produciendo un nuevo tensor de iguales rangos

$$\boxed{S\, T^\mu{}_\alpha \equiv U^\mu{}_\alpha.}$$

Suma y resta: Los tensores pueden ser sumados o restados para formar nuevos tensores, pero los que serán sumados o restados deben ser del mismo tipo

$$\boxed{S^\mu{}_\alpha + T^\mu{}_\alpha \equiv U^\mu{}_\alpha.}$$

Multiplicación: Los tensores pueden ser multiplicados para formar productos de sus componentes. El rango del nuevo tensor será entonces la suma de los rangos de los tensores que se multiplicaron

$$\boxed{A^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv X^\mu Y_\alpha Z_\beta.}$$

$$\boxed{A^{\mu\nu} \equiv U^\mu U^\nu.}$$

Contracción: Un tensor de rango m contravariante y rango n covariante, o el caso de producto de tensores con rangos combinados, es posible formar un tensor de rango m-1 contravariante y rango n-1 covariante, sumando sobre un índice alto con uno bajo

$$\boxed{B_\gamma \equiv A^\sigma{}_{\sigma\gamma} \equiv X^\sigma Y_\sigma Z_\gamma.}$$

Derivada covariante

$$\nabla_\beta v^\alpha \equiv \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}\, v^\lambda$$

$$\nabla_\beta v_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\, v_\lambda$$

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu{}_{\rho\lambda} T^{\mu\rho}$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} T^\rho{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} T^\mu{}_\rho$$

Principio de consistencia

Este principio afirma que una nueva teoría la cual pretende sustituir o reemplazar teorías anteriores debería tener en cuenta (incluir, mejorar) las predicciones de éxito de las teorías anteriores

Relatividad General (Relatividad especial) $\longrightarrow$ Gravedad Newtoniana

Componentes relevantes de Relatividad general

Einstein consideró dos tensores particulares como ingredientes básicos de Relatividad General. Uno que describe las propiedades de la materia y el otro relacionado con los aspectos de la geometría dela espaciotiempo.

<u>El tensor Energía-momentum y el tensor de Einstein</u>

Tensor Energía-momentum: Este describe la distribución y flujo de energía y momentum debido a la presencia y movimiento de materia y radiación en una región del espaciotiempo.
En cualquier evento en una región de interés, sus componentes describen la densidad de energía, el flujo de energía en toda dirección, dividiendo por c (equivalentemente, la densidad de los correspondientes componentes de momentum, multiplicando por c), y los flujos de las componentes de momentum en toda dirección.

Densidad de energía   Densidad de momentum

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

Flujo de energía   Flujo de momentum

Una propiedad importante del tensor energía-momentum es

$$\boxed{\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.}$$

Tensor energía-momentum para un fluido perfecto

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)\, U^\mu\, U^\nu - p\, g^{\mu\nu}.}$$

Hay tres tipos usuales de fluidos perfecto

- ***Polvo:*** gas no relativista dado por p = 0, entonces

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \rho\, U^\mu\, U^\nu}$$

- ***Radiación:*** gas ultra relativista, dado por la traza nula del tensor energía-momentum, de ello se sigue que $p=\rho c^2/3$.

- ***Energía del vacío:*** Asumiendo que ninguna velocidad puede ser medida relativa al vacío. Se sigue entonces que el tensor energía-momentum será proporcional al tensor métrico. Si el vacío es definido como un fluido perfecto conseguimos $p=-\rho c^2$, así que

$$\boxed{\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -p\, g^{\mu\nu} \\ T^{\mu\nu} &= -\rho\, c^2 g^{\mu\nu} \end{aligned}}$$

Tensor energía-momentum para campos electromagnéticos

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\sum_\sigma \mathsf{F}^\mu{}_\sigma\, \mathsf{F}^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\sum_{\rho,\sigma} g^{\mu\nu}\, \mathsf{F}^{\rho\sigma}\, \mathsf{F}_{\rho\sigma}\right)}$$

Tensor de Einstein

Einstein propone que la gravedad debería ser entendida como una manifestación de la curvatura del espacio tiempo.

Tensor de Riemann

$$\boxed{R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\,\Gamma^{\delta}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\delta}{}_{\lambda\gamma}}$$

Conexión

$$\boxed{\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right)}$$

Tensor de Ricci

$$\boxed{R_{\alpha\beta} \equiv R^{\gamma}{}_{\alpha\beta\gamma}}$$

Escalar de Ricci

$$\boxed{R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}}$$

Tensor de Einstein

$$\boxed{G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R.}$$

Cuadridivergencia del tensor de Einstein

$$\boxed{\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0}$$

Ecuaciones de campo de Einstein

En palabras de John Wheeler: La materia le dice al espacio como curvarse y El espacio le dice a la materia como moverse.

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\kappa\, T_{\mu\nu}.}$$

Algunas formas de encontrar soluciones:

- ❖Especificar el tensor de energía-momentum para encontrar los componentes métricos.
- ❖Especificar el tensor métrico para encontrar la forma del tensor energía-momentum.
- ❖Tratar de determinar parcialmente tanto la métrica como el tensor de energía-momentum directamente de situaciones físicas particulares y usar luego las ecuaciones de campo para completar la determinación de la métrica y el tensor de energía-momentum.

Soluciones más conocidas

Agujeros Negros

Cosmología

Ondas Gravitacionales

Objetos compactos

Agujeros de Gusano

Ejemplo: Agujeros Negros

La métrica de Schwarzschild

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\kappa\, T_{\mu\nu}.}$$

$$T_{\mu\nu} = 0$$

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\, R = 0$$

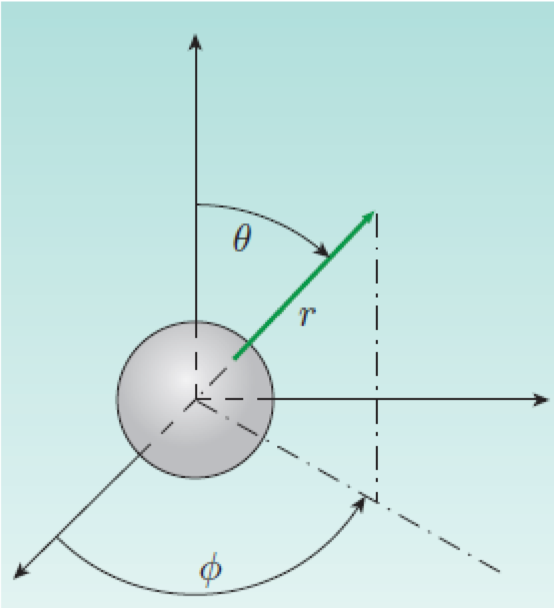
$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\, R\right) = 0$$

$$\left(R^{\nu}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2} \delta^{\nu}{}_{\nu}\, R\right) = 0$$

$$\delta^{0}{}_{0} + \delta^{1}{}_{1} + \delta^{2}{}_{2} + \delta^{3}{}_{3} = 4$$

$$R - \tfrac{1}{2} 4R = 0$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$



$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 = {} & g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \\
& = \mathrm{e}^{2A}(c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{e}^{2B}(\mathrm{d}r)^2 - r^2(\mathrm{d}\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\phi)^2
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{01} &= A'\ (= \Gamma^0{}_{10}), \\
\Gamma^1{}_{00} &= A'\mathrm{e}^{2(A-B)}, \\
\Gamma^1{}_{11} &= B', \\
\Gamma^1{}_{22} &= -r\mathrm{e}^{-2B}, \\
\Gamma^1{}_{33} &= -\mathrm{e}^{-2B}r\sin^2\theta, \\
\Gamma^2{}_{12} &= \frac{1}{r}\ (= \Gamma^2{}_{21}), \\
\Gamma^2{}_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^3{}_{13} &= \frac{1}{r}\ (= \Gamma^3{}_{31}), \\
\Gamma^3{}_{23} &= \cot\theta\ (= \Gamma^3{}_{32}).
\end{aligned}
$$

$$\boxed{R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\lambda\gamma}}$$

$$R^0{}_{101} = A'B' - A'' - (A')^2,$$
$$R^0{}_{202} = -r\mathrm{e}^{-2B}A',$$
$$R^0{}_{303} = -r\mathrm{e}^{-2B}A'\sin^2\theta,$$
$$R^1{}_{212} = r\mathrm{e}^{-2B}B',$$
$$R^1{}_{313} = r\mathrm{e}^{-2B}B'\sin^2\theta,$$
$$R^2{}_{323} = (1-\mathrm{e}^{-2B})\sin^2\theta,$$

$$\boxed{R_{\alpha\beta} \equiv R^{\gamma}{}_{\alpha\beta\gamma}}$$

$$R_{00} = -\mathrm{e}^{2(A-B)}\left(A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r}\right),$$
$$R_{11} = A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r},$$
$$R_{22} = \mathrm{e}^{-2B}\left(1 + r\left(A' - B'\right)\right) - 1,$$
$$R_{33} = \sin^2\theta\left(\mathrm{e}^{2B}\left[1 + r\left(A' - B'\right)\right] - 1\right).$$

$$\boxed{R \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}}$$

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

$$R = -2\mathrm{e}^{-2B}\left(A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r}\left(A' - B'\right) + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}.$$

$$\boxed{G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R.}$$

$$G_{00} = -\frac{2e^{2(A-B)}}{r} B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2},$$

$$G_{11} = -\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2},$$

$$G_{22} = -r^2 e^{-2B} \left(A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right),$$

$$G_{33} = -r^2 e^{-2B} \sin^2\theta \left(A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right).$$

$$e^{-2A} G_{00} + e^{-2B} G_{11} = 0,$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2e^{-2B}}{r} (A' + B') = 0,$$

$$\downarrow$$

$$A' + B' = 0,$$

$$\downarrow$$

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} (dr)^2$$

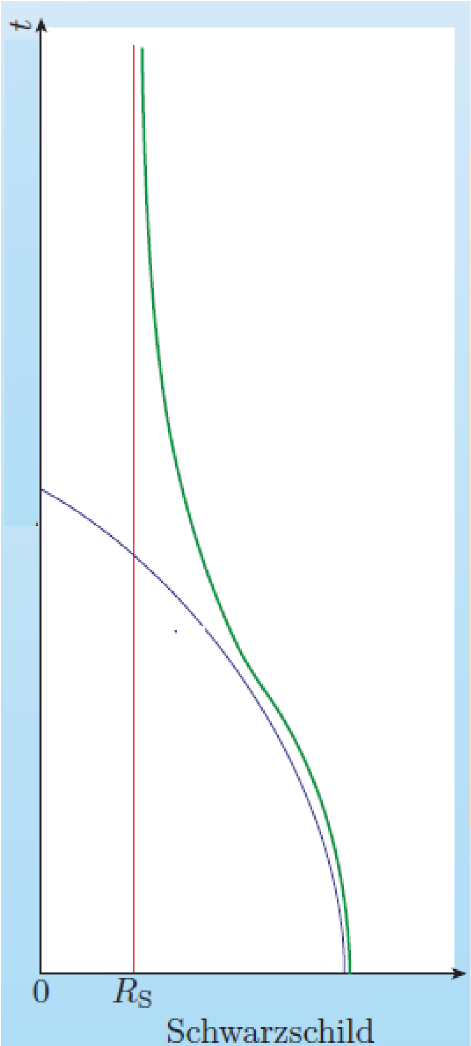
$$A(r) = -B(r), \longleftarrow C = 0, \longleftarrow A(r) + B(r) = C,$$

$$G_{00} = 0 \longrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d(r[1 - e^{-2B}])}{dr} = 0, \longrightarrow e^{-2B} = 1 - R_S/r, \qquad e^{2A} = e^{-2B},$$

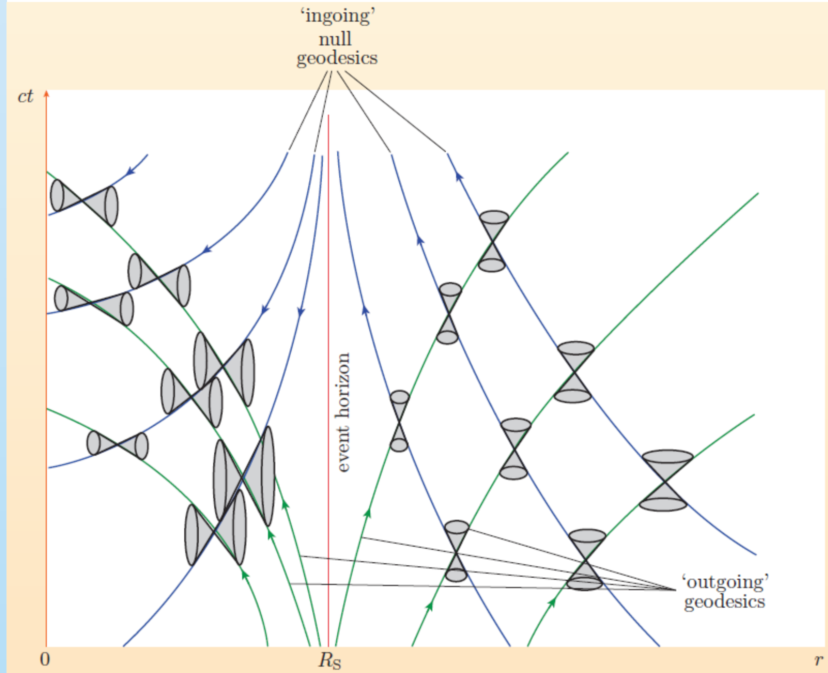
$$R_S = 2GM/c^2. \longrightarrow \longleftarrow e^{2A} = 1 - \frac{R_S}{r}, \quad e^{2B} = \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}}.$$

$$\boxed{(ds)^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} (dr)^2 - r^2 \left((d\theta)^2 + \sin^2\theta \, (d\phi)^2\right).}$$

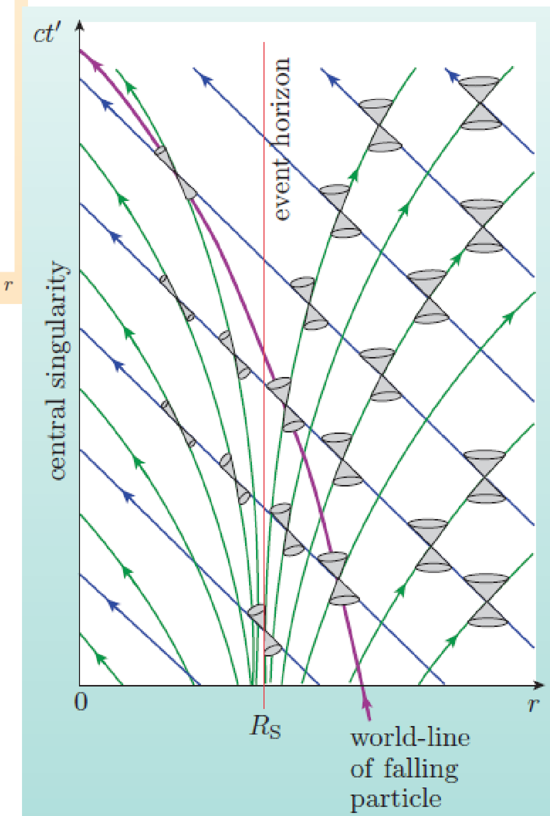
Propiedades	**Métrica**
Masa	Schwarzschild
Masa y momentum angular	Kerr
Masa y carga eléctrica	Reissner-Nordstrom
Masa, momentum angular, carga eléctrica	Kerr-Newman



t
0
R_S
Schwarzschild



'ingoing' null geodesics
ct
event horizon
'outgoing' geodesics
0
R_S
r



ct'
central singularity
event horizon
0
R_S
r
world-line of falling particle

Ejemplo: Objetos compactos

Solución interna de Schwarzschild

La Métrica

La métrica para el caso esférico y estático en su forma más general es:

$$ds^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2), \qquad (1)$$

y el tensor de Ricci resulta de acuerdo a las ecuaciones de Einstein es de la forma:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right), \qquad (2)$$

El Tensor Energía-Momentum

El tensor de energía-momentum, está dado por:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \tag{3}$$

La ecuación de campo (2) implica que:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Algunas Consideraciones

- En un sistema esférico $P(r)$ y $\rho(r)$ sólo pueden depender de la coordenada radial r.
- al ser estático las componentes espaciales de la velocidad deben ser cero:

$$u^i(x) = 0, \qquad i = r, \theta, \varphi. \tag{5}$$

entonces:

$$c^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00}(u^0)^2. \tag{6}$$

Así,

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{B}}, \quad u_0 = c\sqrt{B}. \tag{7}$$

Evaluando El Tensor Energía-Momentum

Usando (5) y (7) podemos evaluar (3):

$$T_{\mu\nu} = diag(\rho c^2 B, PA, Pr^2, Pr^2 sen^2\theta). \tag{8}$$

De (1) se sigue que

$$g^{\mu\nu} = diag\left(\frac{1}{B}, -\frac{1}{A}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\right), \tag{9}$$

entonces la traza del tensor energía-momentum será:

$$T = T^{\lambda}{}_{\lambda} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \rho c^2 - 3P. \tag{10}$$

Valores para el Tensor de Ricci

Sabiendo de (8) y (1)que los valores de $\mu \neq \nu$ son todos cero, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 + 3P\right)B, && (11)\\
R_{11} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 - P\right)A, && (12)\\
R_{22} &= -1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} = -\frac{4\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 - P\right)r^2, && (13)\\
R_{33} &= R_{22} sen^2\theta. && (14)
\end{aligned}$$

Usando (11), (12) y (13) obtenemos:

$$\frac{R_{00}}{2B} + \frac{R_{11}}{2A} + \frac{R_{22}}{r^2} = -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho. \qquad (15)$$

Algunos Calculos

Al multiplicar (15) por r^2, tenemos:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{A(r)}\right) = 1 - \frac{8\pi G}{c^2}\rho r^2. \tag{16}$$

Integrando ahora de cero a r, obtenemos:

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1}, \tag{17}$$

con

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \tag{18}$$

Continuación

Por otro lado, la forma explícita de (4) es:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} = \frac{1}{\sqrt{|\, g\,|}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{|\, g\,|} T^{\mu\nu}) + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} = 0. \quad (19)$$

Calculemos el caso $\mu = 1$, usando la forma de $T^{\mu\nu}$ de (3):

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu T^{1\nu} &= \frac{1}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_\nu \left(\sqrt{|\, g\,|} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^1 u^\nu \right) + \Gamma^{1}_{\nu\lambda} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\nu u^\lambda - \nabla_\nu \left(P g^{1\nu} \right) \\
&= \Gamma^{1}_{00} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^0 u^0 - \partial_\nu P g^{1\nu} \\
&= \frac{B'}{2A} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{c^2}{B} + \frac{P'}{A}. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Continuación

Así (19) y (20) implican:

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2P'}{\rho c^2 + P}. \tag{21}$$

De (15) y (17) encontramos:

$$-\frac{A'}{A} = \frac{2GM}{c^2 r^2} - \frac{8\pi G \rho r}{c^2}. \tag{22}$$

La ecuación TOV

Si usamos (21) y (17) en (13) obtenemos:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}\left[1+\frac{P}{\rho c^2}\right]\left[1+\frac{4\pi r^3 P}{M(r)c^2}\right]\left[1-\frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1}. \tag{23}$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

Cálculo de la Función $B(r)$

Determinemos la función $B(r)$, reemplazando (23) en (21):

$$\frac{B'}{B} = \frac{2G}{c^2 r^2}\left[M(r) + \frac{4\pi r^3 P}{c^2}\right]\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1} . \tag{24}$$

Entonces $\ln B(r)$ es igual a la integral del lado derecho. Tomando la integral de r a ∞, y considerando que $B(\infty) = 1$, se sigue que:

$$B(r) = \exp\left\{-\frac{2G}{c^2}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2}\left(\frac{M(r') + 4\pi r'^3 P(r')/c^2}{1 - 2GM(r')/c^2 r'}\right)\right\} . \tag{25}$$

Verificando la Solución Exterior de Schwarzschild

Las soluciones para $A(r)$ y $B(r)$ tienden a la conocida solución (exterior) de Schwarzschild fuera de la distribución de masa. Como la distribución de masa está limitada a un cierto rango $r < R$, tenemos que para $r > R$:

$$\rho = P = 0 \quad y \quad M(r) = M(R) = M, \tag{26}$$

así tendremos que (25) será:

$$B(r) = \exp\left\{-\frac{2G}{c^2}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} M\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r'}\right]^{-1}\right\} \quad (r > R). \tag{27}$$

Verificando ...(Continuación)

Haciendo el cambio de variable $x = 1 - 2GM/c^2r$, conseguimos:

$$B(r) = \exp\left\{\int_1^x \frac{dx'}{x'}\right\} = 1 - \frac{2GM}{c^2r} \quad (r > R). \tag{28}$$

Para $A(r)$ se sigue de (17) que:

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right]^{-1} \quad (r > R). \tag{29}$$

Ejemplo: Agujeros Negros

Agujero Negro de Kerr

<u>La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (1967)</u>

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\Sigma} d\phi^2,}$$

$$\boxed{M^2 \geq J}$$

Soluciones físicas

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ A &= (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta. \end{aligned}}$$

$$\boxed{a = J/M}$$

$$\boxed{a = 0}$$

Solución de Schwarzschild

Si hacemos M=0 y mantenemos el parámetro “a” constante (Ma=J=0), obtenemos

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\left(\frac{dr^2}{r^2+a^2} + d\theta^2\right) + (r^2+a^2)\sin^2\theta d\phi^2.}$$

Se puede mostrar que la curvatura de esta métrica es idénticamente cero, por tanto es la métrica De un espaciotiempo plano (Minkowski), relacionada a las coordenadas cartesianas del tres espacio Por medio de

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi, \\ y &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.}$$

Las superficies r=cte, serán elipsoides

$\boxed{\dfrac{x^2+y^2}{r^2+a^2} + \dfrac{z^2}{r^2} = 1.}$ $\rightarrow$ Primero con z=0 $\rightarrow$ $\boxed{x^2+y^2 = r^2+a^2,}$ $\rightarrow$ Luego r=0 $\rightarrow$ $\boxed{x^2+y^2 = a^2.}$

Esto es un anillo x,y euclideano, que si “a”=0, es decir, no hay rotación, se convierte en un punto

Singularidades y Horizontes

$$\boxed{R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48M^2(r^2 - a^2\cos^2\theta)\left[(r^2 - a^2\cos^2\theta)^2 - 16r^2a^2\cos^2\theta\right]}{(r^2 - a^2\cos^2\theta)^6}.}$$

Singularidad intrinseca cuando

$$\boxed{\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta = 0.}$$

Podemos reescribir como

$$r^2 + a^2(1 - \sin^2\theta) = 0,$$
$$r^2 + a^2 = a^2\sin^2\theta.$$

De las transformaciones
de coordenadas esferoidales,
Elevando al cuadrado x,y,z.
Luego reemplazando en Σ=0

$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2\theta} - a^2 + a^2\cos^2\theta = 0,$$
$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2\theta} - a^2 + a^2\frac{z^2}{r^2} = 0,$$
$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2\theta} + a^2\left(\frac{z^2}{r^2} - 1\right) = 0,$$
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2\sin^2\theta} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$
$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Para el plano ecuatorial, z=0
, luego para r=0, cosΘ=0, así
Θ=π/2

Tenemos así la singularidad de
anillo

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2.}$$

Para un observador estático que sólo se mueve en el tiempo, sus coordenadas espaciales son constantes(con respecto a un marco inercial) $dt \neq 0, \; dr = d\theta = d\phi = 0$. Entonces tenemos un elemento de línea para un observador tipo tiempo

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 > 0.}$$

Así en el caso de un observador estático, g_{tt} es cero si

$$\boxed{\begin{aligned} 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} &= 0, \\ \Sigma - 2Mr &= 0, \\ r^2 + a^2 \cos^2\theta - 2Mr &= 0. \end{aligned}}$$

Esto es

$$\boxed{r_{s\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta}.}$$

Esto da dos superficies las cuales dependen de la masa M del agujero negro y el parámetro de rotación a ($r_{s\pm}$ es el límite estático).

En el límite de Schwarzschild $a \to 0$ y la superficie r_{s+} se reduce a $r = 2M$ y r_{s-} a $r = 0$.

Las superficies son simétricamente axiales con r_{s+} teniendo un radio $2M$ en el ecuador y (asumiendo $a^2 < M^2$) un radio $M + \sqrt{M^2 - a^2}$ en los polos(esto es $\theta = \pi/2$ y $\theta = 0$) y las superficies r_{s-} quedan contenidas completamente dentro de r_{s+}.

El elemento de línea ds^2 de un fotón en coordenadas de Boyer-Lindquist puede ser escrito como

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \\ 0 &= g_{tt} + 2g_{t\phi}\frac{d\phi}{dt} + g_{rr}\frac{dr^2}{dt^2} + g_{\theta\theta}\frac{d\theta^2}{dt^2} + g_{\phi\phi}\frac{d\phi^2}{dt^2}, \\ \frac{dr^2}{dt^2} &= \frac{1}{g_{rr}}\left[g_{tt} + 2g_{t\phi}\frac{d\phi}{dt} + g_{\theta\theta}\frac{d\theta^2}{dt^2} + g_{\phi\phi}\frac{d\phi^2}{dt^2}\right]. \end{aligned}}$$

con

$$\boxed{\frac{1}{g_{rr}} = \frac{\Delta}{\Sigma}.}$$

Si $\Delta = 0$ entonces la velocidad coordenada radial será cero y así el fotón es incapaz de moverse más radialmente.

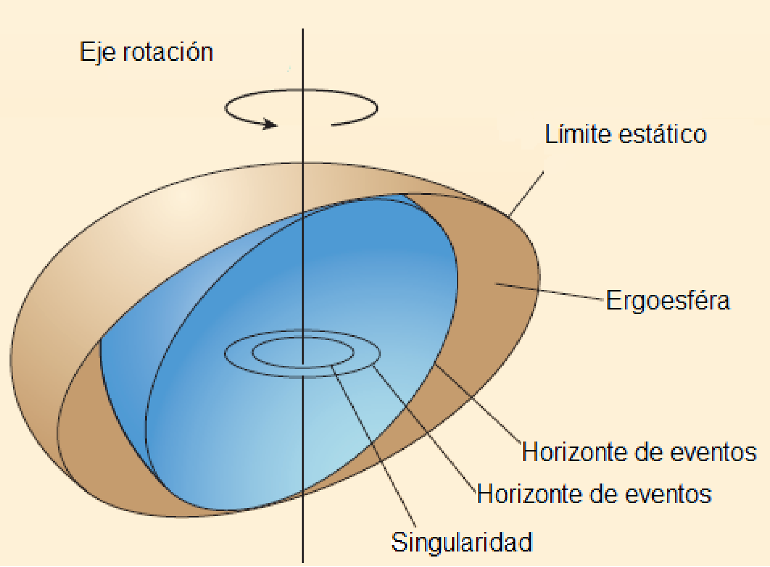
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= 0, \\ r^2 + a^2 - 2Mr &= 0, \\ r_\pm &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned}}$$

Podemos dividir la solución de Kerr en tres regiones

I-) $r_+ < r < \infty$

II-) $r_- < r < r_+$

III-) $0 < r < r_-$



Referencias:

- **Relativity, Gravitation and Cosmology**, Robert J.A. Lambourne
- **An Introduction to Relativity**, Jayant V. Narlikar
- **Introduction to General Relativity**, John Dirk Walecka
- **Einstein's Theory**, Oyvind Gron and Arne Naess
- **Lectures Notes on The General Theory of Relativity**, Oyvind Gron